

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

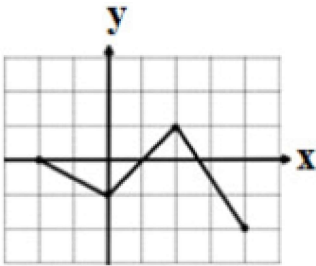
پایه : دوازدهم تجربی

درس : ریاضی

فصل : اول

۱ ضابطه و دامنه تابع وارون تابع مقابل را به دست آورید.  $f(x) = -x^2 - 2; x \geq 0$

۲ نمودار تابع  $f(x)$  به صورت مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$  را رسم کرده و سپس برد تابع  $g(x)$  را تعیین کنید.



۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.  
- تابع  $f$  را در یک بازه ثابت می‌گوییم اگر برای تمام مقادیر  $x$  در این بازه مقدار  $f$  ثابت باشد.

۴ اگر نقطه  $A(1, a)$  روی نمودار  $y = 2f(3x - 1) + 4$  باشد و نقطه متناظر با  $A$  روی نمودار  $y = 2f(1 - x) + 1$  برابر  $A'(b, 7)$  باشد، مقدار  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

۵ اگر نقطه  $A(3, a)$  روی نمودار  $y = f(x)$  باشد و نقطه متناظر با  $A$  روی نمودار  $y = 3f(x - 1) + 1$  باشد، مقدار  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

۶ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. هم‌چنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه با مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کار تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.  
ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۷ مشخص کنید کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

- الف) اگر  $f(x) = x^2 - 4$  و  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ؛ آن گاه  $(f \circ g)(5) = -25$ .
- ب) برای دو تابع  $f$  و  $g$  که  $f \neq g$  تساوی  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$  هیچ وقت برقرار نیست.
- پ) اگر  $f(7) = 5$  و  $g(4) = 7$ ؛ آن گاه  $(f \circ g)(4) = 5$ .
- ت) اگر  $f(x) = \sqrt{x}$  و  $g(x) = 2x - 1$ ؛ آن گاه  $(f \circ g)(5) = g(2)$ .

۸ در هر قسمت وارد خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

- الف)  $f(x) = x^2 - 5$ ؛  $g(x) = \sqrt{x + 6}$  :  $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$
- ب)  $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ ؛  $g(x) = \frac{6}{3x - 5}$  :  $D_{f \circ g}, (f \circ g)(x)$
- پ)  $f(x) = \sqrt{x + 2}$ ؛  $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$  :  $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$
- ت)  $f(x) = \sin x$ ؛  $g(x) = \sqrt{x}$  :  $D_{g \circ f}, (g \circ f)(x)$

۹ یک به یک بودن تابع  $y = \frac{x + 5}{2x - 1}$  را بررسی کنید.

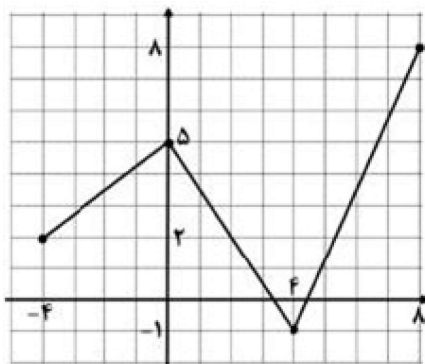
۱۰ نشان دهید  $f$  تابعی صعودی اکید یا نزولی اکید است و بنابراین یک به یک،  $f^{-1}$  را بیابید و نمودارهای  $f$  و  $f^{-1}$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$y = -x^2 - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, -2]$$

۱



$$R = [-1, 4]$$

۲

۳ درست

برای حل این سؤالات باید نکته کلیدی را بدانیم و آن اینکه اگر  $A(1, a)$  باشد ۱ برابر  $x$  و  $a$  برای  $y$  است.

۴

$$A(1, a) \xrightarrow{x=1 \text{ و } y=a} a = 2f(3-1) + 4 \Rightarrow 2f(2) = a - 4 \Rightarrow f(2) = \frac{a-4}{2}$$

برای قسمت دوم سؤال داریم:

$$1 - x = 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$x = -1$  برای نقطه  $A'$  است، بنابراین  $b = -1$  است.

$$\xrightarrow{x=-1} y = 2f(2) + 1 = 2\left(\frac{a-4}{2}\right) + 1 = 7 \Rightarrow a - 4 + 1 = 7 \Rightarrow a = 10$$

$$A(3, a) \Rightarrow f(3) = a$$

برای قسمت دوم سؤال داریم:

۵

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$  برای نقطه  $A'$  است، بنابراین  $b = 4$  است.

$$\xrightarrow{x=4} y = 3f(3) + 1 = 3a + 1 = 1 \Rightarrow 3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

۶ الف مقرون به صرفه است

$$f(x) = x - \frac{2}{10}x = \frac{8}{10}x = \frac{4}{5}x (x > 0) \quad g(x) = x - 200000 \quad x > 1500000$$

$$g(f(x)) = f(x) - 200000 = \frac{4}{5}x - 200000$$

$$\frac{80}{100} \times 200000 - 200000 = 1400000$$

$$f(g(x)) = f(x - 200000) = \frac{4}{5}(x - 200000) = \frac{4}{5}x - 160000$$

$$\text{ب) } \frac{80}{100}(200000 - 200000) = 1440000$$

$$(\text{fog})_{(\delta)} = f(g(\delta)) = g(\delta)^2 - 4 = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = (\sqrt{\delta^2 - 4})^2 - 4 = 21 - 4 = 17$$

الف نادرست (۷)

$$\begin{cases} f(x) = 3x \\ g(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{fog}(x) = f(g(x)) = 3(2x) = 6x \\ \text{gof}(x) = g(f(x)) = 2(3x) = 6x \end{cases} \Rightarrow \text{fog}(x) = \text{gof}(x)$$

$$(\text{fog})(4) = f(g(4)) = f(8) = 24 = \delta$$

$$\begin{cases} (\text{fog})(\delta) = f(g(\delta)) = \sqrt{2 \times \delta - 1} = \sqrt{9} = 3 \\ g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3 \end{cases}$$

ب نادرست

پ درست

ت درست

الف)  $f(x) = x^2 - 5$      $g(x) = \sqrt{x+6}$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [-6, +\infty) \Rightarrow D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-6, +\infty) \mid \sqrt{x+6} \in \mathbb{R}\} = \sqrt{x+6} \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{\text{fog}} = [-6, +\infty) \cap \mathbb{R} = [-6, +\infty)$$

$$(\text{fog})_{(x)} = f(g(x)) = (g(x))^2 - 5 = (\sqrt{x+6})^2 - 5 = x + 1$$

ب)  $f(x) = \sqrt{3-2x}$      $g(x) = \frac{6}{3x-5}$

$$D_f = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

$$D_{\text{fog}} = \left\{x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\} \mid \frac{6}{3x-5} \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]\right\} = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = \sqrt{3-2g(x)} = \sqrt{3-2\left(\frac{6}{3x-5}\right)} = \sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

پ)  $f(x) = \sqrt{x+2}$      $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

$$D_f = [-2, +\infty) \quad D_g = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

$$D_{\text{gof}} = \left\{x \in [-2, +\infty) \mid \sqrt{x+2} \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)\right\} = [14, +\infty)$$

$$\sqrt{x+2} \leq -4 \text{ یا } \sqrt{x+2} \geq 4 \Rightarrow x+2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 14 \Rightarrow x \in [14, +\infty)$$

همواره نادرست است.

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 16} = \sqrt{x - 14}$$

ت)  $f(x) = \sin x$      $g(x) = \sqrt{x}$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R} \cap [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$= [2k\pi, 2k\pi + \pi]_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\sin x \geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول و دوم}} x \in [2k\pi, 2k\pi + \pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\text{fog})(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sin x}$$

یکی به یک است. زیرا (۰/۲۵) (۹)

$$\frac{x_1 + 5}{2x_1 - 1} = \frac{x_2 + 5}{2x_2 - 1} \Rightarrow 2x_2(x_2 - 1) - x_1 + 10x_2 - 5 = 2x_1(x_1 - 1) - 5 \Rightarrow 2x_2^2 - 2x_2 - x_1 + 10x_2 - 5 = 2x_1^2 - 2x_1 - 5$$

$$\Rightarrow 2x_2^2 - 2x_2 - x_1 + 10x_2 - 5 = 2x_1^2 - 2x_1 - 5 \Rightarrow 2x_2^2 - 2x_2 - x_1 + 10x_2 = 2x_1^2 - 2x_1$$

$x_2 > x_1 \geq 0 \rightarrow \sqrt{x_2} > \sqrt{x_1} \Rightarrow f$  اکیداً صعودی است  
 $y = \sqrt{x}, y \geq 0 \rightarrow x = y^2, y \geq 0 \rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$

