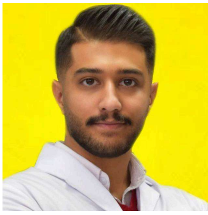
نوع آزمون : تشریحی
زمان آزمون : ۱۵دقیقه

پایه : دوازدهم ریاضی
شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

درس : هندسه
آکادمی دکتر اکبری Akbari۱.ir

فصل : اول



۱ در ماتریس، $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$، اگر $a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & i>j \\ ۲ & i=j \\ i^{۲} & i<j \end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس را به دست آورید.

۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) فرض کنید A و B ماتریس هم‌مرتبه باشند، همواره رابطه $AB=BA$ برقرار است.
ب) اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه ۲×۲ باشد، و $|A|=۲$ آنگاه: $\left|۴A^{-۱}\right|=A$.
پ) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالا و پایین سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد در این صورت، فصل مشترک صفحه با سطح مخروطی، یک هذلولی است.

۳ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.

۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

۵ اگر $A=[۱ \;\; ۲ \;\; -۳]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۶ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریس هم‌مرتبه‌ی A در این صورت
الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.
ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۷ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۸ دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y-۱۳=۰ \\ y+۲x-۵=۰ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۹ اگر $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل عبارت $(A^{-۱}+I)^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۱۰ اگر A و B دو ماتریس متقارن از مرتبه‌ی ۳ باشند و AB نیز متقارن باشد، ثابت کنید: $AB=BA$

۱ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ تعیین اعداد

مجموع درایه ها = ۱۲

۲ الف) نادرست ب) نادرست پ) نادرست

۳ $$\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۵-۱۴} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۱۷ & -۹ \end{bmatrix}$$

(ص ۲۵)

۴ $$۲ \times \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - ۳ \times \frac{۱}{۱۷} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷} \\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۸۵+۲۱}{۱۱۹} & \frac{-۵۱-۶۳}{۱۱۹} \\ \frac{-۳۴+۱۰۵}{۱۱۹} & \frac{۶۸+۴۲}{۱۱۹} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱۹} \begin{bmatrix} ۱۰۶ & -۱۱۴ \\ ۷۱ & ۱۱۰ \end{bmatrix}$$

۵ $$\mathrm{AB} = [۱ \;\; ۲ \;\; -۳] \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = [-۲ + (-۲) + (-۹)] = \begin{bmatrix} -۱۳ \end{bmatrix} = -۱۳ \Rightarrow |\mathrm{AB}| = -۱۳$$

$$\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} [۱ \;\; ۲ \;\; -۳] = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

$$|\mathrm{BA}| = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{bmatrix} \begin{matrix} -۲ & -۴ \\ -۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{matrix} \Rightarrow |\mathrm{BA}| = (-۳۶ - ۳۶ - ۳۶) - (-۳۶ - ۳۶ - ۳۶) = ۰$$

۶ $$A = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{rb}_{۱۱} & \mathrm{rb}_{۱۲} & \mathrm{rb}_{۱۳} \\ \mathrm{rb}_{۲۱} & \mathrm{rb}_{۲۲} & \mathrm{rb}_{۲۳} \\ \mathrm{rb}_{۳۱} & \mathrm{rb}_{۳۲} & \mathrm{rb}_{۳۳} \end{bmatrix} = \mathrm{rB}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{rb}_{۱۱} & \mathrm{rb}_{۱۲} & \mathrm{rb}_{۱۳} \\ \mathrm{rb}_{۲۱} & \mathrm{rb}_{۲۲} & \mathrm{rb}_{۲۳} \\ \mathrm{rb}_{۳۱} & \mathrm{rb}_{۳۲} & \mathrm{rb}_{۳۳} \end{bmatrix} = \mathrm{rB}$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = \mathrm{rB}$$

۷

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ ۱ & ۱۰\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۳۳ & ۴۸\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AC}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ ۱ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۳۳ & ۴۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB}=\mathrm{AC}\not\Rightarrow B=C$$

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad B=[b_{ij}]_{۲\times۲}\qquad C=[\,c_{ij}\,]_{۲\times۲}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\overline{O}\not\Rightarrow B=C$$

$$\mathrm{AB}-\mathrm{AC}=\overline{O}\Rightarrow A(B-C)=\overline{O}\not\Rightarrow\begin{cases}A=\overline{O}\\ B=C\end{cases}$$

۸

$$\begin{cases}۳x-۴y=۱۳\\ ۲x+y=۵\end{cases}\Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix}۱۳\\ ۵\end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۱} & \frac{۴}{۱۱}\\ \frac{-۲}{۱۱} & \frac{۳}{۱۱}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱۳\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱۳}{۱۱}+\frac{۲۰}{۱۱}=۳\\ y=\frac{۲۶}{۱۱}+\frac{۱۵}{۱۱}=-۱\end{cases}$$

۹

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}+I=\begin{bmatrix}-۳ & -۴\\ -۲ & -۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ -۲ & -۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱}+I)^{-۱}=\frac{۱}{-۴}\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow (A^{-۱}+I)^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

۱۰ چون ماتریس AB متقارن است پس $(\mathrm{AB})^t=\mathrm{AB}$ در نتیجه $B^tA^t=\mathrm{AB}$ و چون ماتریس‌های A و B هر دو متقارن هستند پس: $\mathrm{BA}=\mathrm{AB}$.

۱ ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ تعیین اعداد

مجموع درایه ها = ۱۲

۲ الف) نادرست   ب) نادرست   پ) نادرست

۳

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۵-۱۴} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۱۷ & -۹ \end{bmatrix}$$

(ص ۲۵)

۴

$$۲ \times \frac{۱}{۱۴} \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - ۳ \times \frac{۱}{۱۷} \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷} \\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۸۵+۲۱}{۱۱۹} & \frac{-۵۱-۶۳}{۱۱۹} \\ \frac{-۳۴+۱۰۵}{۱۱۹} & \frac{۶۸+۴۲}{۱۱۹} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱۹} \begin{bmatrix} ۱۰۶ & -۱۱۴ \\ ۷۱ & ۱۱۰ \end{bmatrix}$$

۵

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = [-۲ + (-۲) + (-۹)] = \begin{bmatrix} -۱۳ \end{bmatrix} = -۱۳ \Rightarrow |\mathrm{AB}| = -۱۳$$

$$\mathrm{BA} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{bmatrix}$$

$$|\mathrm{BA}| = \begin{vmatrix} -۲ & -۴ & ۶ \\ -۱ & -۲ & ۳ \\ ۳ & ۶ & -۹ \end{vmatrix} \begin{matrix} -۲ & -۴ \\ -۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{matrix} \Rightarrow |\mathrm{BA}| = (-۳۶ - ۳۶ - ۳۶) - (-۳۶ - ۳۶ - ۳۶) = ۰$$

۶

$$A = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{rb}_{۱۱} & \mathrm{rb}_{۱۲} & \mathrm{rb}_{۱۳} \\ \mathrm{rb}_{۲۱} & \mathrm{rb}_{۲۲} & \mathrm{rb}_{۲۳} \\ \mathrm{rb}_{۳۱} & \mathrm{rb}_{۳۲} & \mathrm{rb}_{۳۳} \end{bmatrix} = \mathrm{rB}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & ۰ & ۰ \\ ۰ & r & ۰ \\ ۰ & ۰ & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{rb}_{۱۱} & \mathrm{rb}_{۱۲} & \mathrm{rb}_{۱۳} \\ \mathrm{rb}_{۲۱} & \mathrm{rb}_{۲۲} & \mathrm{rb}_{۲۳} \\ \mathrm{rb}_{۳۱} & \mathrm{rb}_{۳۲} & \mathrm{rb}_{۳۳} \end{bmatrix} = \mathrm{rB}$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = \mathrm{rB}$$

۷

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ ۱ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۶ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ ۳۳ & ۴۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \not\Rightarrow B = C$$

$$\mathrm{AC} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & ۱۶ \\ \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} ۶ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۳ & ۴۸ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B = [b_{\mathrm{ij}}]_{۲\times۲} \qquad C = [\,c_{\mathrm{ij}}\,]_{۲\times۲}$$

$$AB = AC = \overline{O} \nRightarrow B = C$$