

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم انسانی

درس : ریاضی و آمار

فصل : دوم

۱ در دنباله حسابی  $۱، ۵، ۹، \dots، ۴۰۱$ ،  
الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید.  
ب) مجموع جملات دنباله را به دست آورید.

۲ باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آن‌ها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیش‌تری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کم‌تری دارد.  
اگر عرض نخستین پلهی این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پلهی آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پلهی پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

۳ براساس رابطه‌ی به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند.

۴ برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخند. اگر فاصله‌ی اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله‌ی هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)



۵ با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدامیک دنباله‌ی حسابی است.

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } a_1 = 2 & a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \\ \text{ب) } a_1 = -1 & a_{n+1} = a_n + 5 \\ \text{ج) } a_1 = -1 & a_{n+1} = 5a_n + 1 \\ \text{د) } & a_{n+1} - a_n = n \end{array}$$

محاسبه‌ی جذر اعداد در تمدن بابل - با نوشتن جملات دنباله‌ی بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شگفت‌انگیزی به جذر

۶

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{k}{a_n} \right) \quad a_1 = k \quad \text{عدد } k \text{ یعنی } \sqrt{k} \text{ نزدیک شویم.}$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین‌النهرین) است. به کمک دنباله‌ی بازگشتی بالا، اگر  $a_3$  را تقریبی برای  $\sqrt{k}$  در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

الف)  $\sqrt{2}$       ب)  $\sqrt{3}$       ج)  $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

جدول زیر را کامل کنید.

۷

| جملات دنباله  | رابطه بازگشتی | ضابطه دنباله | دنباله دو ضابطه‌ای |
|---|---------------|--------------|--------------------|
| ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ...                                       |               |              |                    |
| ۴, ۱, ۴, ۱, ۴, ۱, ...                                       |               |              |                    |
| $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$     |               |              |                    |
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ |               |              |                    |

جمله‌ی پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

۸

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, a_1 = -2 \quad \text{الف)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1 \quad \text{ب)}$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}, a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad \text{ج)}$$

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n, a_1 = 1 \quad \text{د)}$$

اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی  $y = 4x - 1$  پیروی کنند، با توجه به دامنه‌ی دنباله:

۹

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه‌ی بازگشتی دنباله را بنویسید. شیب خط چه ارتباطی با رابطه‌ی بازگشتی دنباله دارد؟

برای محاسبه‌ی قبض آب (آب‌بها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه‌ی مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه‌ی زیر، آب‌بها محاسبه می‌شود:

هزینه‌ی هر متر مکعب با توجه به طبقه‌ی مصرف  $\times$  میانگین مصرف = آب‌بها

جدول ۱. محاسبه‌ی آب‌بها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

| طبقات مصرف (متر مکعب) | هزینه (ریال) | طبقات مصرف (متر مکعب) | هزینه (ریال) |
|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|
| $0 \leq x < 5$        | ۱/۴۱۹        | $25 \leq x < 30$      | ۸/۴۹۶        |
| $5 \leq x < 10$       | ۲/۱۲۳        | $30 \leq x < 35$      | ۱۱/۵۸۰       |
| $10 \leq x < 15$      | ۲/۸۲۷        | $35 \leq x < 40$      | ۱۵/۴۴۴       |
| $15 \leq x < 20$      | ۳/۷۰۳        | $40 \leq x < 50$      | ۳۳/۴۶۲       |
| $20 \leq x < 25$      | ۵/۴۰۰        | $x \geq 50$           | ۶۶/۹۲۴       |

الف) نمودار «طبقه مصرف - آب‌بها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطه و دامنه و برد تابع را به دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی در تهران در یک ماه  $20/49 m^3$  باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌بها را مشخص می‌کند؟

۱

$$\text{الف) } a_n = a_1 + (n-1)d \xrightarrow{a_1=1, d=4} a_n = 1 + (n-1)(4) \Rightarrow a_n = 4n - 3 \text{ (ص ۶۴)}$$

$$\text{ب) } a_n = 4n - 3 \Rightarrow 4n - 3 = 401 \Rightarrow 4n = 401 + 3 \Rightarrow 4n = 404 \Rightarrow n = \frac{404}{4} = 101$$

$$S_n = \frac{101 \times (1 + 401)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201 = 20301 \text{ یا}$$

$$S_n = \frac{101 \times (2 \times 1 + (101-1) \times 4)}{2} = \frac{101 \times (2 + 400)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201 = 20301$$

۲ روش اول:

$$d = \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow -10 = \frac{45-125}{n+1} \Rightarrow -10n-10 = -80 \Rightarrow -10n = -70 \Rightarrow n = 7$$

۷ پله بین این دو پله قرار دارد پس نردبان کلاً ۹ پله دارد.

۴۵ + ۱۱۵ + ... + ۱۲۵ : مقدار چوب موردنیاز برای ساخت پله‌ها

$$s_9 = \frac{9}{2}(125 + 45) = 765 \quad \text{متر } 7/65 = 765 \div 100 = \text{سانتی‌متر}$$

روش دوم:

می‌توان یک دنباله‌ی حسابی در نظر گرفت که در آن جمله‌ی اول ۱۲۵ و جمله‌ی آخر ۴۵ و اختلاف مشترک ۱۰- باشد. در این مسئله تعداد جملات و مجموع جملات موردنظر است.

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{45 - 125}{-10} + 1 = 9 \text{ (تعداد پله‌ها)}$$

$$S = \frac{n}{2}(a_n + a_1) = \frac{9}{2}(125 + 45) = 9 \times 85 = 765 \text{ متر} = 7/65 \text{ متر} = \text{سانتی متر}$$

۳

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$d = \frac{18-10}{3+1} = \frac{8}{4} = 2$$

۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸

پس دنباله موردنظر چنین است:

۴

$$a_1 = 3, d = 5, n = 12$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{12} = 3 + (12-1)(5) = 58$$

فاصله‌ی دوازدهمین (آخرین) چرخ تا موتور برابر ۵۸ متر است که برابر شعاع دایره‌ای است که این میله آبیاری

$$\text{متر مربع } 10562/96 = \pi r^2 = 3/14 \times (58)^2 \approx \text{مساحت آبیاری شده می‌کند.}$$

الف)  $2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$

دنباله حسابی نیست.

ب)  $-1, 4, 9, 14, \dots$

دنباله حسابی است.

ج)  $-1, -4, -9, -14, \dots$

دنباله حسابی نیست.

د)

|         |                 |
|---------|-----------------|
| $n = 1$ | $a_2 - a_1 = 1$ |
| $n = 2$ | $a_3 - a_2 = 2$ |
| $n = 3$ | $a_4 - a_3 = 3$ |
| $n = 4$ | $a_5 - a_4 = 4$ |
| $n = 5$ | $a_6 - a_5 = 5$ |
| .....   | .....           |

دنباله حسابی نیست زیرا اختلاف دو جمله متوالی، ثابت نیست.

توجه: در مورد (د) جمله‌ی اول داده نشده است و اگر قرار دهیم  $a_1 = k$  این دنباله شکل زیر در می‌آید:

$$k, k + 1, k + 3, k + 6, k + 10, k + 15, \dots$$

$$1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots$$

مثلاً برای  $k = 1$  می‌شود:

الف)  $k = 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right), a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{2}{a_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{2}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( a_2 + \frac{2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1/416$$

ب)  $k = 3$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \left( a_n + \frac{3}{a_n} \right), a_1 = 3$$

$$a_2 = \frac{1}{3} \left( a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = \frac{1}{3} \left( 3 + \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{3} (3 + 1) = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \left( a_2 + \frac{3}{a_2} \right) = \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{6} \approx 1/75$$

ج)  $k = 5$

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} \left( a_n + \frac{5}{a_n} \right), a_1 = 5$$

$$a_2 = \frac{1}{5} \left( a_1 + \frac{5}{a_1} \right) = \frac{1}{5} \left( 5 + \frac{5}{5} \right) = \frac{1}{5} (6) = 3$$

$$a_3 = \frac{1}{5} \left( a_2 + \frac{5}{a_2} \right) = \frac{1}{5} \left( 3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{1}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{14}{15} \approx 2/33$$

ماشین حساب، جذر (ریشه دوم) یک عدد را فقط به صورت اعشاری نشان می‌دهد و گرد می‌کند. مزیت این روش این است که جذر یک عدد را به صورت عددی گویا نشان می‌دهد.

| جملات دنباله   | رابطه بازگشتی                          | ضابطه دنباله          | دنباله دو ضابطه‌ای   |
|--|--|-----------------------|--|
| 5, 8, 11, 14, 17, ...  | $a_{n+1} = a_n + 3$<br>$a_1 = 5$       | $a_n = 3n + 2$        |  |
| 4, 1, 4, 1, 4, 1, ...  | $a_{n+1} = \frac{4}{a_n}$<br>$a_1 = 4$ |                       | $a_n = \begin{cases} 4 & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases}$           |
| 1, $\frac{1}{2}$ , 3, $\frac{1}{3}$ , 5, $\frac{1}{6}$ , ... |  |                       | $a_n = \begin{cases} n & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n} & \text{زوج } n \end{cases}$ |
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$  |  | $a_n = \frac{n}{n+1}$ |  |

توجه: رابطه بازگشتی ردیف ۲ را می‌توان به صورت  $a_{n+1} = a_n + 3(-1)^n$  هم نوشت.

$$\text{الف) } a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n ; a_1 = -2$$

$$a_1 = -2 , a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}(-2) = \frac{-2}{3} , a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{-2}{9}$$

$$a_4 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{9}\right) = \frac{-2}{27} , a_5 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{27}\right) = \frac{-2}{81} \text{ جمله پنجم}$$

$$-2, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-2}{27}, \frac{-2}{81}, \dots$$

$$\text{ب) } a_{n-1} = \frac{1}{1+a_n} ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1 , a_2 = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} , a_3 = \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+a_3} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} , a_5 = \frac{1}{1+a_4} = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} \text{ جمله پنجم}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots$$

$$\text{ج) } a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} ; a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$a_1 = 1 , a_2 = 1 , a_3 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5 \text{ جمله پنجم}$$

$$1, 1, 1, 3, 5, \dots$$

$$\text{د) } a_{n+1} = a_n + (-1)^n ; a_1 = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$$

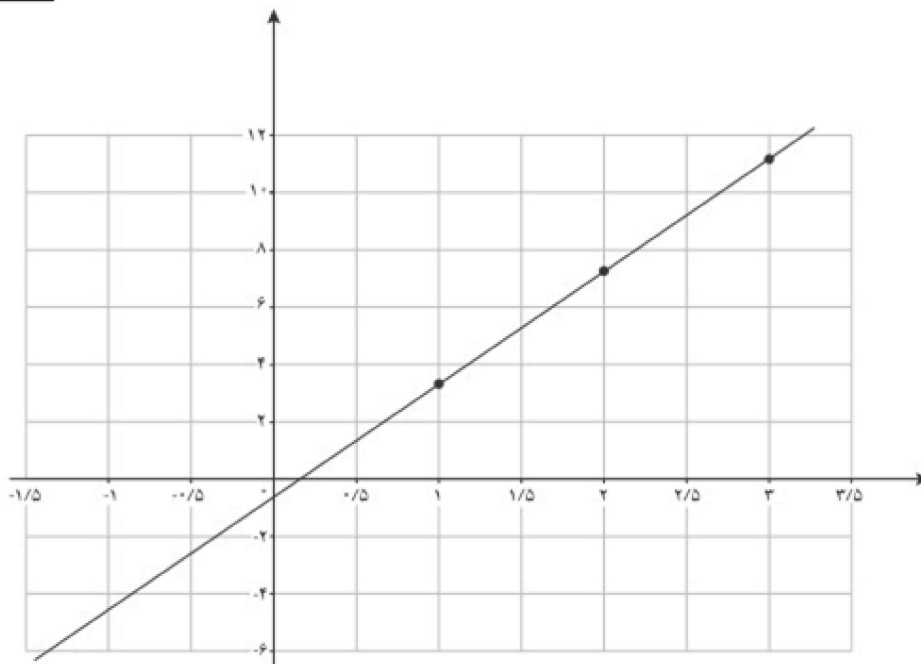
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 1 + (-1) = 0$$

$$n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 0 + 1 = 1 \text{ جمله پنجم}$$

$$1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

|   |              |   |
|---|--------------|---|
|   | $y = 4x - 1$ |   |
| x | ۱            | ۲ |
| y | ۳            | ۷ |

|                |   |   |    |    |
|----------------|---|---|----|----|
| $a_n = 4n - 1$ |   |   |    |    |
| n              | ۱ | ۲ | ۳  | ۴  |
| $a_n$          | ۳ | ۷ | ۱۱ | ۱۵ |



(ب) جملات دنباله : ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۰۰۰

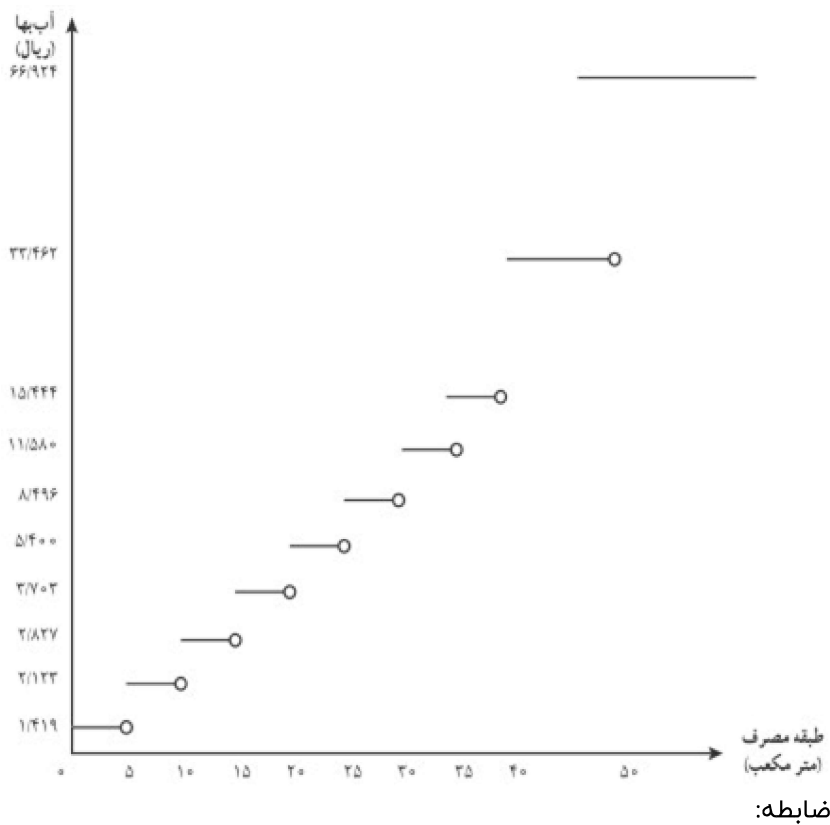
۱ نمایش تابعی دنباله  $a_n = 4n - 1$

رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + 4, a_1 = 3$

شیب خط همان اختلاف مشترک بین دو جمله متوالی در این رابطه بازگشتی است (یعنی ۴).

نکته: به طور کلی در دنباله حسابی:  $a_{n+1} = a_n + m$  (شیب خط)



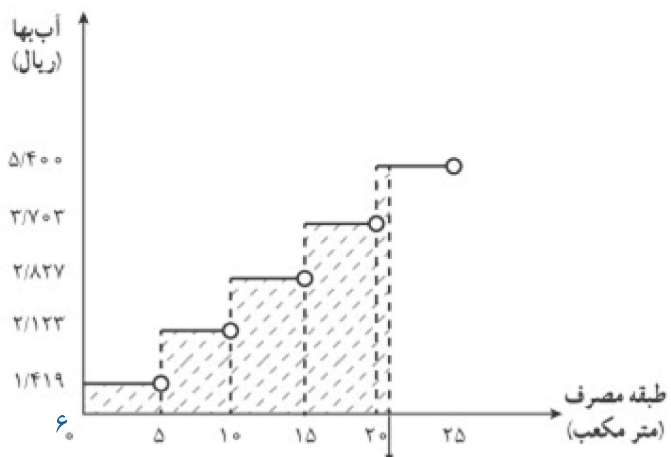


$$f(x) = \begin{cases} 1/419 & 0 \leq x < 5 \\ 2/123 & 5 \leq x < 10 \\ 2/827 & 10 \leq x < 15 \\ 3/703 & 15 \leq x < 20 \\ 5/400 & 20 \leq x < 25 \\ 8/496 & 25 \leq x < 30 \\ 11/580 & 30 \leq x < 35 \\ 15/444 & 35 \leq x < 40 \\ 33/462 & 40 \leq x < 50 \\ 66/924 & 50 \leq x \end{cases}$$

دامنه:  $x \geq 0$

برد:  $\{1/419, 2/123, 2/827, 3/703, 5/400, 8/496, 11/580, 15/444, 33/462, 66/924\}$

(ب)



$$f(x) = \begin{cases} 1/419 & 0 \leq x < 5 \\ 2/123 & 5 \leq x < 10 \\ 2/127 & 10 \leq x < 15 \\ 3/7.3 & 15 \leq x < 20 \\ 5/400 & 20 \leq x < 20/49 \end{cases}$$