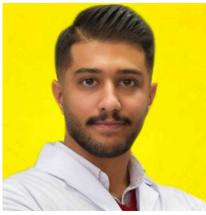


زمان آزمون : ۱۵دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari۱.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم تجربی

درس : ریاضی

فصل : دوم

۱ اگر $\operatorname{Log}(\operatorname{Sin}\alpha) = -۱$ و $\operatorname{Log}(\operatorname{Cos}\beta) = -۲$ ، آن‌گاه حاصل $\operatorname{Log}\left(\dfrac{۱ - \operatorname{Cos}۲\alpha}{۱ + \operatorname{Cos}۲\beta}\right)$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $\alpha = \dfrac{\pi}{۸}$ و $\beta = \dfrac{\pi}{۱۲}$ ، آن‌گاه حاصل $(\operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha)^۲ + (\operatorname{Sin}\beta - \operatorname{Cos}\beta)^۲$ را به‌دست آورید.

۳ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{\operatorname{Sin}۲\alpha}{۱ + \operatorname{Cos}۲\alpha} \times \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{۱ + \operatorname{Cos}\alpha}$$

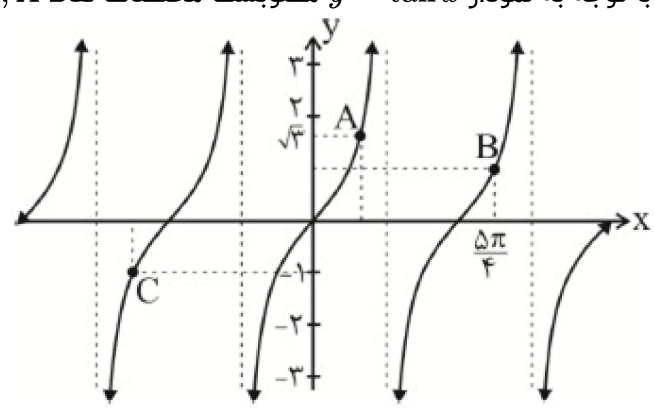
۴ اگر $\operatorname{Sin}\alpha = \dfrac{۳}{۵}$ و α در ناحیهٔ اول باشد، حاصل $\operatorname{tg}۲\alpha$ را به دست آورید.

۵ معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$۲\operatorname{Sin}^۲ x = ۳\operatorname{Cos} x$$

۶ فرض کنید α زاویهٔ تند و $\operatorname{Sin}\alpha = \dfrac{۳}{۵}$ باشد، مقدار $\operatorname{Sin}۲\alpha$ و $\operatorname{Cos}۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۷ با توجه به نمودار $y = \tan x$ مطلوبست مختصات نقاط C, B, A؟



۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

- تابع $y = \operatorname{tg} x$ در بازه $[۰, \pi]$ اکیداً صعودی است.

۹ چند زاویه در فاصله $[-\pi, \pi]$ وجود دارد که مقدار سینوس آن‌ها برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد. (با راه‌حل)

۱۰ با استفاده از نمودار $y = \mathrm{Cos}\, x$ در فاصله $[۰, ۲\pi]$، نمودار $y = \left|-\frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\left(\frac{۱}{۲}x\right)\right|$ را رسم کنید.

۱

$$\begin{cases} ۱-\mathrm{Cos}\,۲\alpha = ۲\,\mathrm{Sin}^{۲}\alpha \\ ۱+\mathrm{Cos}\,۲\beta = ۲\,\mathrm{Cos}^{۲}\beta \end{cases}$$

$$\mathrm{Log}\left(\frac{۱-\mathrm{Cos}\,۲\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,۲\beta}\right)=\mathrm{Log}\left(\frac{۲\,\mathrm{Sin}^{۲}\alpha}{۲\,\mathrm{Cos}^{۲}\beta}\right)=\mathrm{Log}\left(\frac{\mathrm{Sin}^{۲}\alpha}{\mathrm{Cos}^{۲}\beta}\right)$$

$$=\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sin}^{۲}\alpha)-\mathrm{Log}\,(\mathrm{Cos}^{۲}\beta)$$

$$\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sin}\,\alpha)^{۲}-\mathrm{Log}\,(\mathrm{Cos}\,\beta)^{۲}=۲\,\mathrm{Log}\,(\mathrm{Sin}\,\alpha)-۲\,\mathrm{Log}\,(\mathrm{Cos}\,\beta)$$

$$=۲(-۱)-۲(-۲)=-۲+۴=۲$$

۲

$$(\mathrm{Sin}\,\alpha+\mathrm{Cos}\,\alpha)^{۲}+(\mathrm{Sin}\,\beta-\mathrm{Cos}\,\beta)^{۲}$$

$$=\mathrm{Sin}^{۲}\alpha+۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha+\mathrm{Cos}^{۲}\alpha+\mathrm{Sin}^{۲}\beta-۲\,\mathrm{Sin}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta+\mathrm{Cos}^{۲}\beta$$

$$=۱+\mathrm{Sin}\,۲\alpha+۱-\mathrm{Sin}\,۲\beta=۲+\mathrm{Sin}\,۲\left(\frac{\pi}{۸}\right)-\mathrm{Sin}\,۲\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)$$

$$=۲+\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right)-\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳

$$\frac{\mathrm{Sin}\,۲\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,۲\alpha}\times\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,\alpha}=\frac{۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{۲\,\mathrm{Cos}^{۲}\alpha}\times\frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,\alpha}=\frac{\cancel{۲}\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\cancel{\mathrm{Cos}^{۲}}\,\alpha}{\cancel{۲}\,\cancel{\mathrm{Cos}^{۲}}\,\alpha(۱+\mathrm{Cos}\,\alpha)}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,\alpha}=\frac{\cancel{۲}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{۲}\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{۲}}{\cancel{۲}\,\mathrm{Cos}^{۲}\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}=\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{۲}}{\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{۲}}=\tan\frac{\alpha}{۲}$$

۴

$$\mathrm{Sin}\,\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\mathrm{Cos}^{۲}\alpha=۱-\mathrm{Sin}^{۲}\alpha\Rightarrow\mathrm{Cos}^{۲}\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\mathrm{Cos}^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\mathrm{Cos}\,\alpha=\pm\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\alpha\ \text{ناحیه اول}}\mathrm{Cos}\,\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha}=\frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}\Rightarrow\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\mathrm{tg}\,۲\alpha=\frac{۲\,\mathrm{tg}\,\alpha}{۱-\mathrm{tg}^{۲}\alpha}=\frac{۲\times\left(\frac{۳}{۴}\right)}{۱-\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۷}{۱۶}}\Rightarrow\mathrm{tg}\,۲\alpha=\frac{۲۴}{۷}$$

۵

$$۲\,\mathrm{Sin}^{۲}x=۳\,\mathrm{Cos}\,x\Rightarrow۲(۱-\mathrm{Cos}^{۲}x)=۳\,\mathrm{Cos}\,x\Rightarrow۲\,\mathrm{Cos}^{۲}x+۳\,\mathrm{Cos}\,x-۲=۰$$

$$\Rightarrow\mathrm{Cos}\,x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(۳)^{۲}-۴(۲)(-۲)=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow\Delta=۲۵$$

$$\mathrm{Cos}\,x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۲)}=\frac{-۳\pm۵}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{۲}\ \text{ق ق}\\ -۲\ \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\mathrm{Cos}\,x=\frac{۱}{۲}=\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳},\ k\in Z$$

۶

$$\text{Sin}^{۲}\alpha + \text{Cos}^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} + \text{Cos}^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \text{Cos}^{۲}\alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = \pm\frac{۴}{۵}$$

با توجه به این‌که α زاویه تند است؛ نتیجه می‌گیریم $\text{Cos}\,\alpha = +\frac{۴}{۵}$ است. حال کافی است در روابط زیر، مقادیر $\text{Sin}\,\alpha$ و $\text{Cos}\,\alpha$ را جای‌گذاری کنیم:

$$\text{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha = ۲\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۴}{۵}\right) = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\text{Cos}\,۲\alpha = \text{Cos}^{۲}\alpha - \text{Sin}^{۲}\alpha = \left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲} - \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۷}{۲۵}$$

۷ نقطه A: اولین نقطه‌ای است که تابع tan به عدد $+\sqrt{۳}$ می‌رسد پس مختصات نقطه A برابر است با:

$$A\left(\frac{\pi}{۳}, \sqrt{۳}\right)$$

نقطه B: تابع تانژانت در طول $x = \frac{۵\pi}{۴}$ و در ناحیه سوم قرار دارد. $B\left(\frac{۵\pi}{۴}, ۱\right)$

نقطه C: در چرخیدن خلاف جهت مثلثاتی دومین نقطه‌ای که تانژانت به مقدار ۱- می‌رسد مدنظر ماست:

$$C\left(-\frac{۵\pi}{۴}, -۱\right)$$

۸ نادرست

۹

$$\text{Sin}\,x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \text{Sin}\,\frac{\pi}{۴}$$

$$x = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴} \qquad x = \frac{۳\pi}{۴}$$

۱۰

$$y = \left|-\frac{۱}{۲}\text{Cos}\left(\frac{۱}{۲}x\right)\right| \qquad \begin{matrix}[۰\,,\,۲\pi] \\ [۰\,,\,۴\pi]\end{matrix}$$

x	۰	π	۲π	۳π	۴π
y	$+\frac{۱}{۲}$	۰	$+\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$