

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

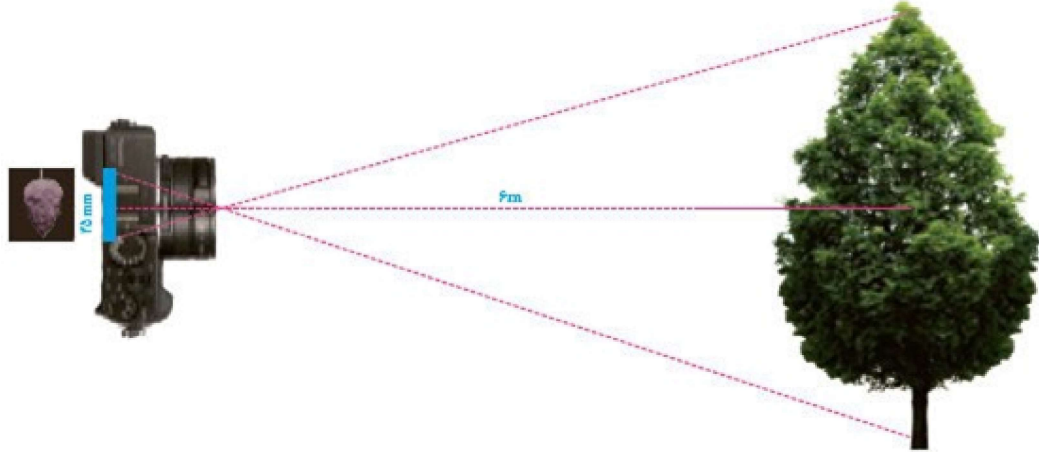
نوع آزمون : تشریحی

پایه : دهم ریاضی

درس : هندسه

فصل : دوم

۱ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه‌ی فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی ثبت و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، 35 mm و فاصله‌ی آن درون دوربین تا عدسی، $4/2 \text{ cm}$ و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، 6 m باشد، اندازه‌ی واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

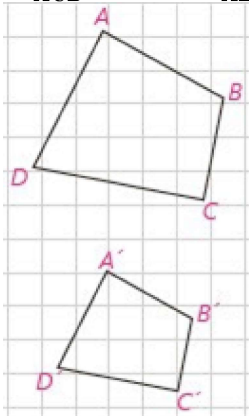


۲ چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند. اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، K باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی K است.

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:
 $\Delta ACD \sim \Delta A'C'D'$ $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

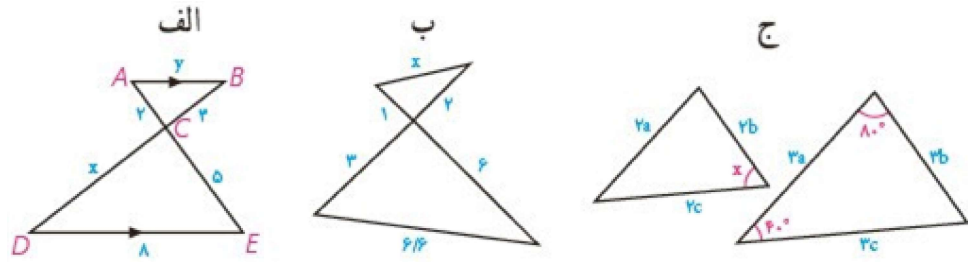
نسبت تشابه‌ها چیست؟
 ۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} \cdot S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$



۳

در هریک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آن‌جا مقادیر x, y را مشخص کنید.



۴

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطه‌ی E ، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

با توجه به این موضوع داریم:
 $DE = \dots, DB = \dots$
 در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ ، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

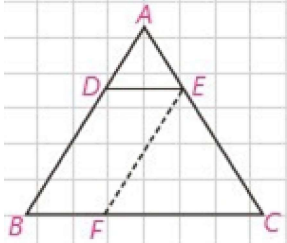
$$\frac{AD}{\dots} = \frac{\dots}{AC} \quad (1)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$ ، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

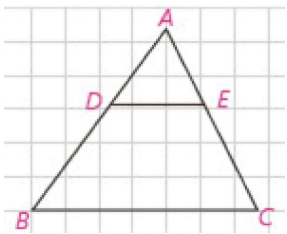


۵

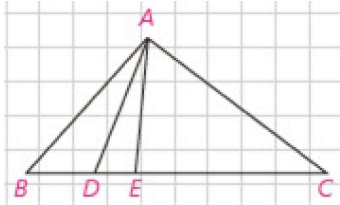
در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه‌ی تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه‌ی

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفصیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه‌ی $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها

صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.



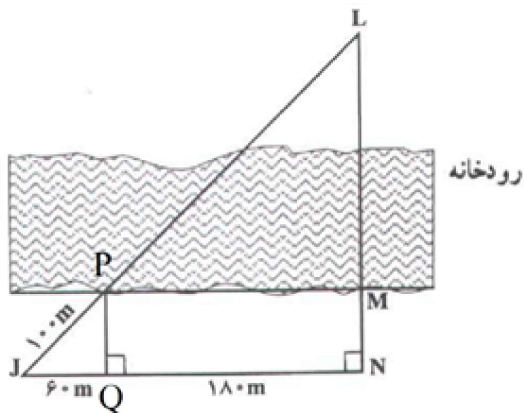
۶ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید.



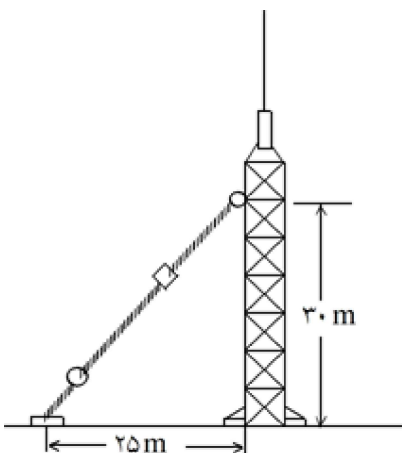
۷ قضیه: ثابت کنید در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۸ اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میان‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

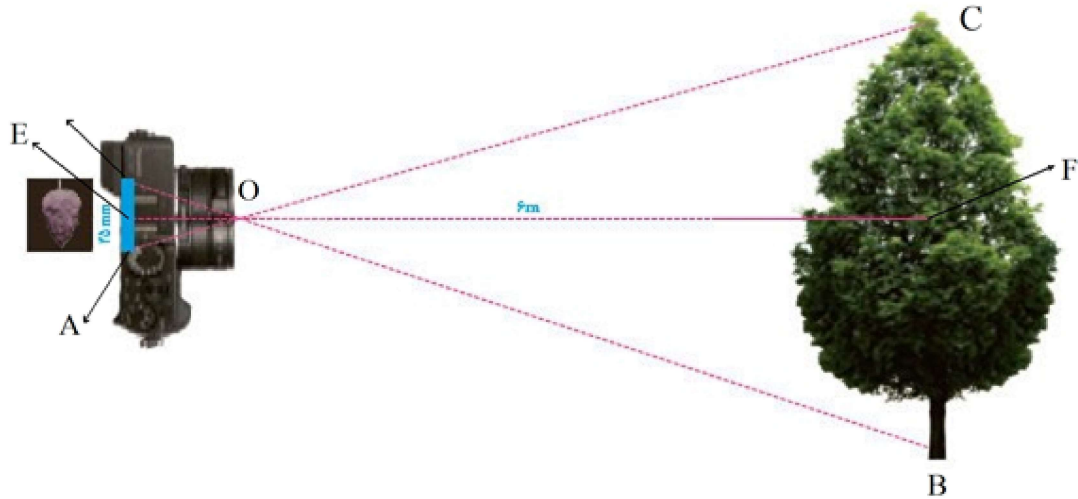
۹ دهکده‌ای در یک سوی رودخانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق‌رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.



۱۰ یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری توسط یک سیم به‌طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟



۱) با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل داریم:



$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OED \sim \triangle OFB \Rightarrow \frac{DE}{BF} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow \frac{0.35}{2} = \frac{0.42}{6}$$

$$\Rightarrow BF = 2/5 \Rightarrow BC = 5$$

پس ارتفاع درخت ۵ متر است. (توجه کنید ۳۵ mm مساوی ۰/۰۳۵m و ۴/۲ cm مساوی ۰/۰۴۲m است.)

$$۱) \left. \begin{aligned} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = K \Rightarrow \frac{AB + AC + BC + CD}{A'B' + A'C' + B'C' + C'D'} = K \Rightarrow \frac{\text{محیط}_{ABCD}}{\text{محیط}_{A'B'C'D'}} = K \end{aligned} \right\}$$

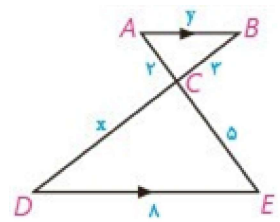
دو چهارضلعی ABCD و A'B'C'D' متشابهند. پس اضلاع آن‌ها متناسبند و نسبت اضلاع آن‌ها برابر K است.

$$۲) \frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'}, \widehat{D} = \widehat{D'} \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, \widehat{B} = \widehat{B'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'BC'$$

$$۳) \frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = K^2, \frac{S_{A'BC'}}{S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'BC'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = K^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = K^2$$

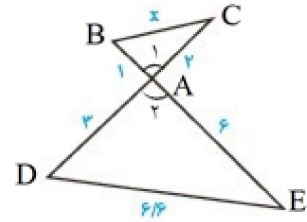
الف ۳



$$AB \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle ABC \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{15}{2} = 7.5$$

$$\Rightarrow \frac{y}{8} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{16}{5} = 3.2$$

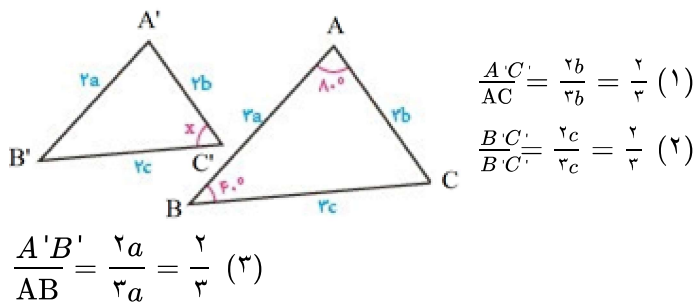
ب) دو مثلث ABC و ADE با تناسب بین دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آن‌ها متشابه‌اند. زیرا:



$$\left. \begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{1}{3} \\ \frac{AC}{AE} &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{6/6} \Rightarrow x = \frac{6/6 \times 1}{3} = 2/3$$

ج)



از روابط مقابل نتیجه می‌گیریم دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تناسب سه ضلع، متشابه‌اند و داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ \\ \hat{B} &= \hat{B}' \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ \\ \hat{C} &= \hat{C}' \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}' = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ \end{aligned} \right.$$

اولاً چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است زیرا اضلاع مقابل آن دو به دو موازیند. پس ضلع‌های مقابل آن مساویند.

۴

$$DE = BF, DB = EF \quad \text{یعنی:}$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1) \quad \text{ثانیاً:}$$

$$EF \parallel AB \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (2) \quad \text{ثالثاً:}$$

$$\text{در نتیجه:} \quad \text{از (1) و (2)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{BF}{BC} \xrightarrow{BE=BF} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

۵

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}$$

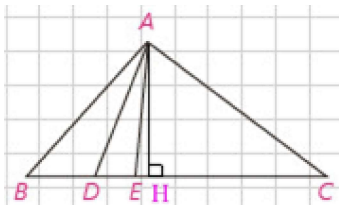
$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{تفصیل از صورت}} \frac{AB - AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

۶

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت ارتفاع مشترک هر سه مثلث است.

$$S_{ACE} = 3 S_{ADE} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 3 \times \frac{1}{2} AH \times DE \Rightarrow CE = 3 DE \quad (1)$$

$$S_{ACE} = 2 S_{AOB} \Rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 2 \times \frac{1}{2} AH \times BD \Rightarrow CE = 2 BD \quad (2)$$



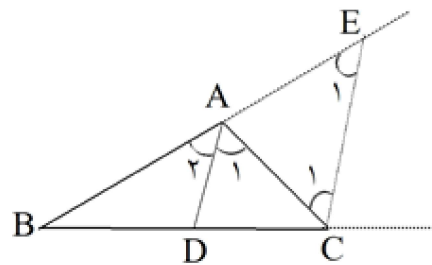
حال با فرض $DE = x$ از (۱) نتیجه می‌گیریم $CE = 3x$ و از (۲) نتیجه می‌گیریم $BD = \frac{3}{2}x$ پس داریم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{3}{2}x + x + 3x}{x} = \frac{11}{2}x \cdot \frac{2}{x} = 11$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{x}{\frac{3}{2}x} = \frac{2}{3}$$

۷

برهان: فرض کنیم AD نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A باشد ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیم‌ساز زاویه‌ی A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. (۰/۲۵) چون AD موازی CE است، اگر AC را به‌عنوان خط مورب در نظر بگیریم آن‌گاه: (۱) $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ ، و اگر BE را به‌عنوان خط مورب آن‌ها در نظر بگیریم آن‌گاه (۲) $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵)، از طرفی طبق فرض مسئله، AD نیم‌ساز است در نتیجه: (۳) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حال از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵)، پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و (۴) $AE = AC$ (۰/۲۵)، در مثلث BEC، AD موازی EC است، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم: (۵) $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$ (۰/۲۵)، با توجه به رابطه‌ی (۴) اگر در رابطه‌ی (۵) به‌جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: (۰/۲۵) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ که حکم ثابت می‌شود.



فرض کنید دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ متشابه هستند و AM و $A'M'$ میانه‌های نظیر در این دو مثلث هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{2BM}{2B'M'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'} \\ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle A'B'M' \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} \end{array}$$

پس نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است.

$$\hat{Q} = \hat{N} = 90^\circ \Rightarrow PQ \parallel LN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{JQ}{JN} = \frac{JP}{JL} \Rightarrow \frac{60}{240} = \frac{100}{JL} \Rightarrow JL = \frac{240 \times 100}{60} = 400$$

$$\text{طول سیم}^2 = 30^2 + 25^2$$

$$\text{طول سیم}^2 = 900 + 625 = 1525$$

$$\text{طول سیم} = \sqrt{1525} m$$

