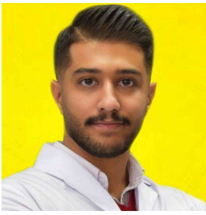


نوع آزمون : تشریحی

پایه : یازدهم ریاضی

درس : هندسه

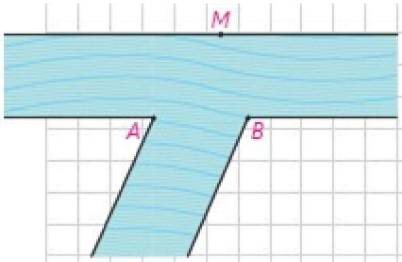
فصل : دوم

زمان آزمون : ۱۵دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari۱.ir

۱ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله‌ی A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله‌ی M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

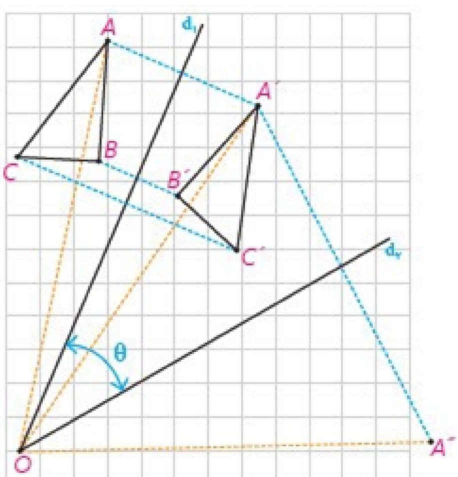


۲ در شکل، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با زاویه‌ی θ یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط $d_۱$ است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ را نسبت به خط $d_۲$ رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ بنامید.

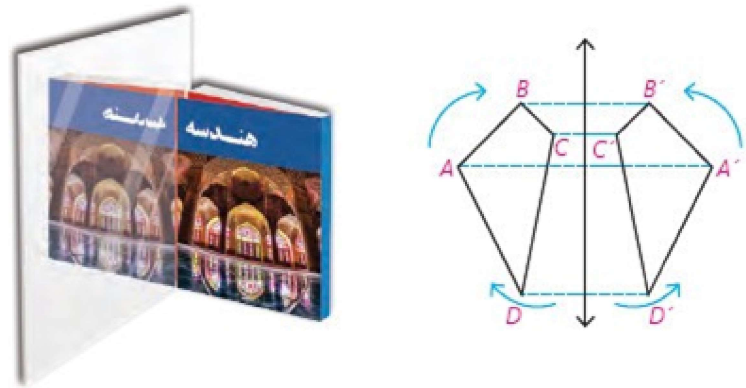
الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = ۲\theta$

ب) اندازه‌ی $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چه‌قدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B''}C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

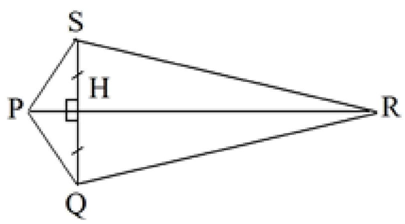


۳ در شکل زیر چهارضلعی A'B'C'D' تصویر چهارضلعی محدب ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب A به B C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق چند حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



۴ در شکل روبه‌رو PR عمودمنصف QS است. با استفاده از ویژگی‌های تبدیل‌ها ثابت کنید:

$$S\widehat{P}R = Q\widehat{P}R$$



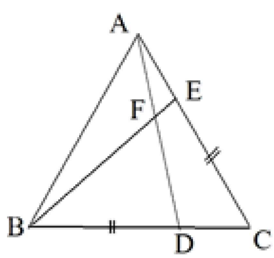
۵ با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.

۶ به کمک تبدیل‌ها، ثابت کنید زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند.

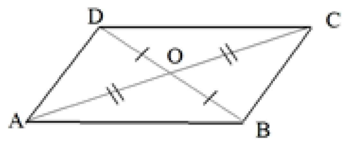
۷ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

با استفاده از دوران ثابت کنید:

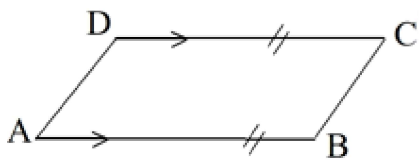
$\mathrm{AD} = \mathrm{BE}$ و $\widehat{\mathrm{BFD}} = ۶۰^\circ$



۸ قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند.
با استفاده از دوران ثابت کنید: ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

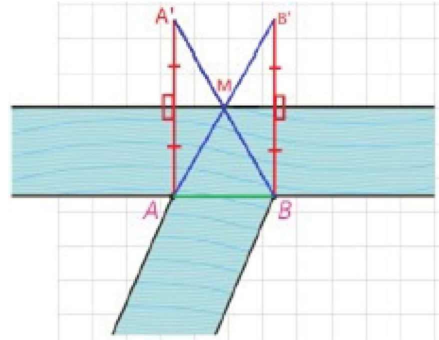


۹ در چهارضلعی ABCD، $AB \parallel DC$ و $AB = DC$،
با استفاده از انتقال ثابت کنید: $AD \parallel BC$ و $AD = BC$



۱۰ مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط المرکزین $d =$ ۱۳، ۵a−۳ باشد.

۱ با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت درنظر گرفته شده است. پس یا از نقطه‌ی B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه‌ی M اجرا می‌کنیم.



۲ الف) خط $d_۱$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه 'AOA است یعنی: $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه "A'OA است یعنی: $\widehat{O}_۳ = \widehat{O}_۴$

$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = \widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ + \widehat{O}_۳ + \widehat{O}_۴ \xrightarrow[\widehat{O}_۳=\widehat{O}_۴]{\widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲}$$

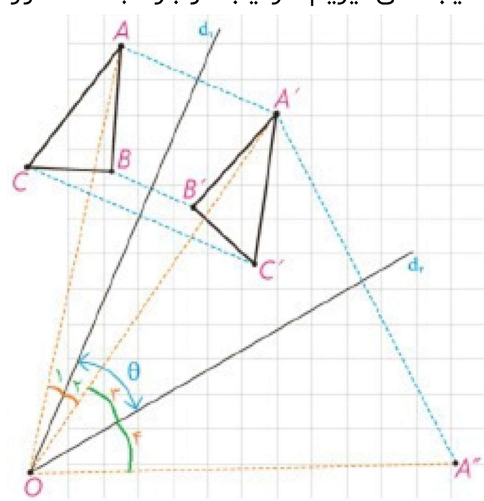
$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\widehat{\mathrm{O}}_۲ + ۲\widehat{\mathrm{O}}_۳ \Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\underbrace{\left(\widehat{\mathrm{O}}_۲ + \widehat{\mathrm{O}}_۳\right)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\theta$$

ب) بنابر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{\mathrm{BOB}}'' = \widehat{\mathrm{COC}}'' = ۲\theta$

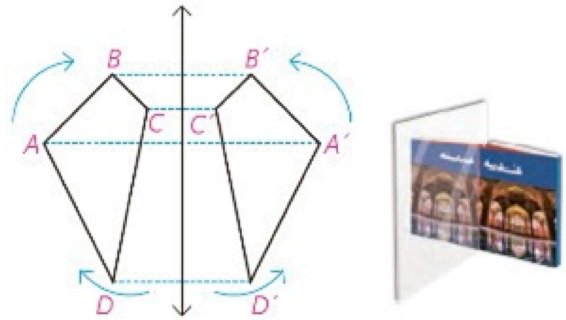
پ) با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''\mathrm{C}''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.



۳ جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

خیر نمی‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند.



۴ راه‌حل اول: PR را به عنوان محور تقارن در نظر می‌گیریم تحت بازتاب نسبت به خط PR داریم:

$$\left.\begin{array}{l} P \to P \\ S \to Q \\ R \to R \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \mathrm{PS} \to \mathrm{PQ} \\ \mathrm{PR} \to \mathrm{PR} \\ \mathrm{SR} \to \mathrm{QR} \end{array}\right.$$

$$\to \mathrm{PS} = \mathrm{PQ}, \mathrm{PR}, \mathrm{SR} = \mathrm{QR} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\triangle}{\mathrm{PSR}} = \overset{\triangle}{\mathrm{PQR}} \to S\widehat{P}R = Q\widehat{P}R$$

بازتاب ایزومتری است.

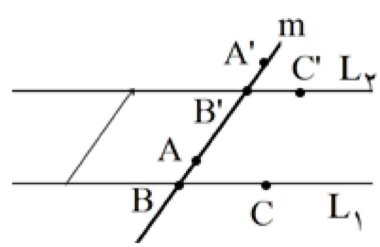
راه حل دوم: PR را به عنوان محور تقارن در نظر می‌گیریم تحت بازتاب نسبت به خط PR داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S \to Q \\ P \to P \\ R \to R \end{array}\right\} \to S\widehat{P}R \to Q\widehat{P}R \Rightarrow S\widehat{P}R = Q\widehat{P}R$$

۵ تحت انتقالی به موازات خط مورب m که خط $L_۱$ را بر روی $L_۲$ می‌نگارد.

خواهیم داشت: $C \to C', B \to B', A \to A'$

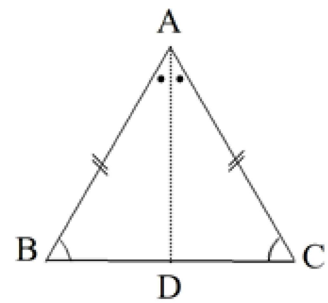
بنابراین $\widehat{\mathrm{ABC}} \to \widehat{A'B'C'}$ یعنی زاویه‌های متناظر برابرند.



۶ فرض: $AB = AC$

حکم: $\widehat{B} = \widehat{C}$

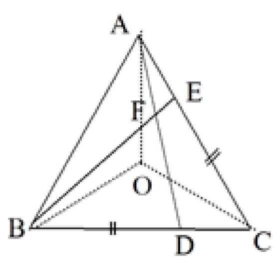
برهان: نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند.
تحت بازتاب نسبت به خط AD خطی که شامل پاره‌خط AB است روی خطی که شامل پاره‌خط AC است تصویر می‌شود. چون $AB = AC$ پس $B \to C$
بنابراین $\widehat{B} = \widehat{C}$ یعنی زاویه‌های مقابل به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.



۷ نیمسازهای زاویه‌های A و B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. در این صورت $OA = OB = OC$ و $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = ۱۲۰^\circ$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \widehat{AOB} = ۱۲۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} B \\ \overset{\triangle}{OAE} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OE = OD \\ \widehat{EOD} = ۱۲۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow D \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} E \end{array}\right\} \Rightarrow AD \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۲۰^\circ \text{ به مرکز } O} BE$$

پس تبدیل ایزومتری است. پس $AD = BE$. از طرفی زاویه‌ی بین هر خط و دوران یافته‌ی آن با زاویه‌ی دوران برابرست.



۸

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OC = OA \\ \widehat{AOC} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} C \\ \left.\begin{array}{l} OB = OD \\ \widehat{BOD} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} D \end{array}\right\} \Rightarrow AB \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} CD$$

دوران ۱۸۰ درجه یک تبدیل ایزومتری بوده و شیب را حفظ می‌کند. پس $AB = CD$ و $AB \parallel CD$. بنابراین $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

۹ اگر $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم خواهیم داشت.

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC} \\ \mathrm{AB} = \mathrm{DC}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{\mathrm{AB}}]{\text{تحت انتقال با}} C \\ A \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{\mathrm{AB}}]{\text{تحت انتقال با}} B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{AD} \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{\mathrm{AB}}]{\text{تحت انتقال با}} \mathrm{BC}$$

انتقال یک تبدیل ایزومتری است و شیب را حفظ می‌کند پس $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ و $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$.

۱۰ مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}} \rightarrow ۵a - ۳ = \sqrt{۱۳^{۲} - (۸ - ۳)^{۲}}$

$\rightarrow ۵a - ۳ = ۱۲ \rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$