

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم انسانی

درس : ریاضی و آمار

فصل : سوم

۱) فردی ده میلیون تومان پول خود را در یک شرکت تولید کالای ایرانی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال به پاس اعتمادش ۲۰ درصد سود علی‌الحساب از طرف شرکت به او پرداخت شود، آنگاه پس از دو سال مبلغ سرمایه‌گذاری او چه مقدار خواهد شد؟

۲) حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $5^{0/13} \times 5^{0/88}$

ب) $\left(\frac{\sqrt{\frac{-1}{3}}}{\sqrt{\frac{-1}{6}}} \right)^{-12}$

۳) در دنباله هندسی $\frac{2}{3}, 2, 6, \dots$

الف) ضابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید.

ب) مجموع ۶ جمله اول دنباله داده شده را به دست آورید.

۴) جمله دوم یک دنباله هندسی، ۶ و جمله پنجم همین دنباله، ۴۸ است.

الف) نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید.

ب) جمله هفتم این دنباله را بنویسید.

۵) جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آن‌ها، این تعداد با نرخ $\frac{2}{5}$ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ $\frac{1}{8}$ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید.

پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیش‌تر از موش‌ها می‌شود؟

ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟

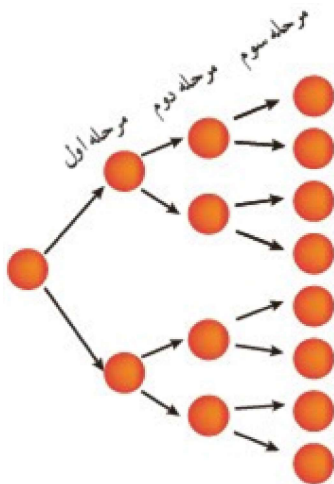
ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

۶) نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنید.

۷) نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در یک دستگاه (صفحه‌ی مختصات) رسم کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها را برشمرد.

۸

در پژوهشکده‌ی رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه‌ی قلب را به وجود آورند. در شکل، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است. اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل روبه‌رو ادامه پیدا کند:
 الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟
 ب) در مرحله‌ی هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟
 پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟



۹

یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جو زمین، چه قدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۱۰

میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله‌ی شروع از a و ختم به b یک دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه‌ی $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n + 2)$ جمله است.)

$$f(t) = 10, \dots, \dots \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)^t = 10, \dots, \dots \times (1/2)^t = 10, \dots, \dots \times (1/44) \text{ (ص 103)}$$

$$= 14, 400, \dots$$

1

الف) $5^{0/12+0/88} = 5^1 = 5$

2

ب) $\frac{7^{+4}}{7^{+2}} = 7^{4-2} = 7^2 = 49 \text{ (ص 93)}$

الف) $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} = 3 \end{cases}$ يا $\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases} \text{ (ص 81)}$

3

ب) $S_7 = \frac{\frac{2}{3}(1-3^7)}{1-3} = \frac{\frac{2}{3}(1-2187)}{-2} = \frac{\frac{2}{3}(-2186)}{-2} = \frac{-2 \times 2186}{-2 \times 3} = \frac{2186}{3}$

الف) $\frac{a_1 r^5}{a_1 r} = r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{48}{8} = 6 \Rightarrow r = 2$

4

ب) $a_2 = a_1 r \Rightarrow 6 = a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 3$

$a_5 = a_1 r^4 \Rightarrow a_5 = 3 \times 2^4 = 48 \text{ (ص 83)}$

$$f(x) = 23576(1 - 0.25)^t = 23576(0.75)^t$$

$$g(x) = 15786(1 + 0.18)^t = 15786(1.18)^t$$

(الف)

$$f(1) = 23576 \times (0.75)^1 \cong 22987$$

$$f(2) = 23576 \times (0.75)^2 \cong 22412$$

$$f(3) = 23576 \times (0.75)^3 \cong 21852$$

$$f(4) = 23576 \times (0.75)^4 \cong 21306$$

$$f(5) = 23576 \times (0.75)^5 \cong 20773$$

$$f(6) = 23576 \times (0.75)^6 \cong 20254$$

$$f(7) = 23576 \times (0.75)^7 \cong 19748$$

$$f(8) = 23576 \times (0.75)^8 \cong 19254$$

$$f(9) = 23576 \times (0.75)^9 \cong 18773$$

$$f(10) = 23576 \times (0.75)^{10} \cong 18304$$

(ب)

$$g(1) = 15786 \times (1.18)^1 \cong 16070$$

$$g(2) = 15786 \times (1.18)^2 \cong 16359$$

$$g(3) = 15786 \times (1.18)^3 \cong 16653$$

$$g(4) = 15786 \times (1.18)^4 = 16953$$

$$g(5) = 15786 \times (1.18)^5 = 17258$$

$$g(6) = 15786 \times (1.18)^6 = 17569$$

$$g(7) = 15786 \times (1.18)^7 = 17885$$

$$g(8) = 15786 \times (1.18)^8 = 18207$$

$$g(9) = 15786 \times (1.18)^9 = 18535$$

$$g(10) = 15786 \times (1.18)^{10} = 18869$$

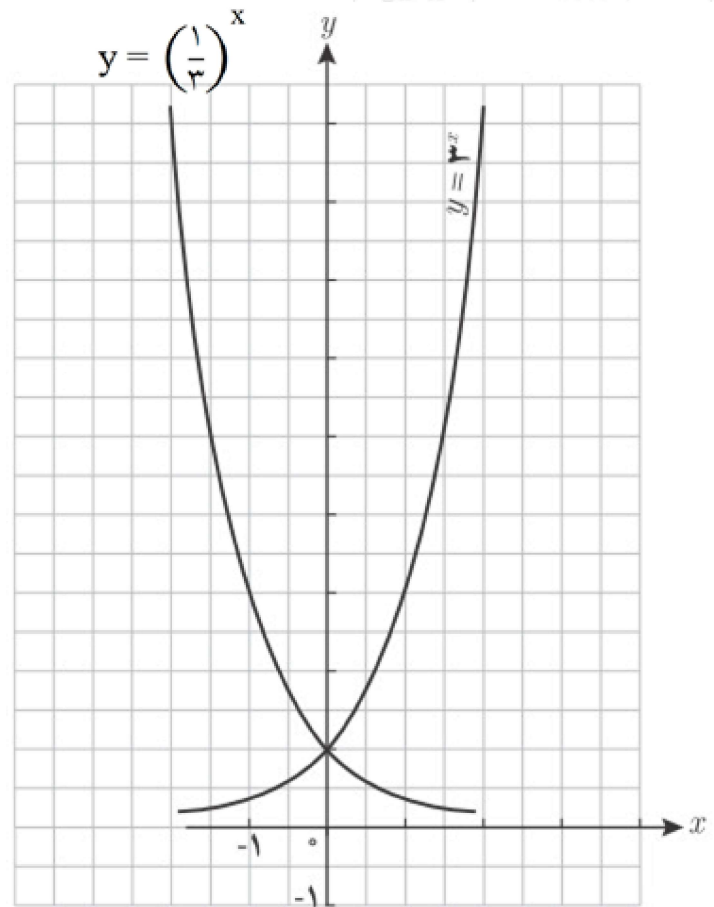
(پ) $f(10) < g(10)$ ← در سال دهم

(ت) در یکی از روزهای سال نهم (بین ۹ سال و ۱۰ سال) جمعیت موش‌ها و گربه‌ها برابر می‌شوند.

(ث) جمعیت گربه‌ها زیاد و زیادتر و موش‌ها کم و کمتر می‌شوند و رو به نابودی می‌روند.

جمعیت گربه‌ها پس از	
یک سال	۱۶۰۷۰
دو سال	۱۶۳۵۹
سه سال	۱۶۶۵۳
چهار سال	۱۶۹۵۳
پنج سال	۱۷۲۵۸
شش سال	۱۷۵۶۹
هفت سال	۱۷۸۸۵
هشت سال	۱۸۲۰۷

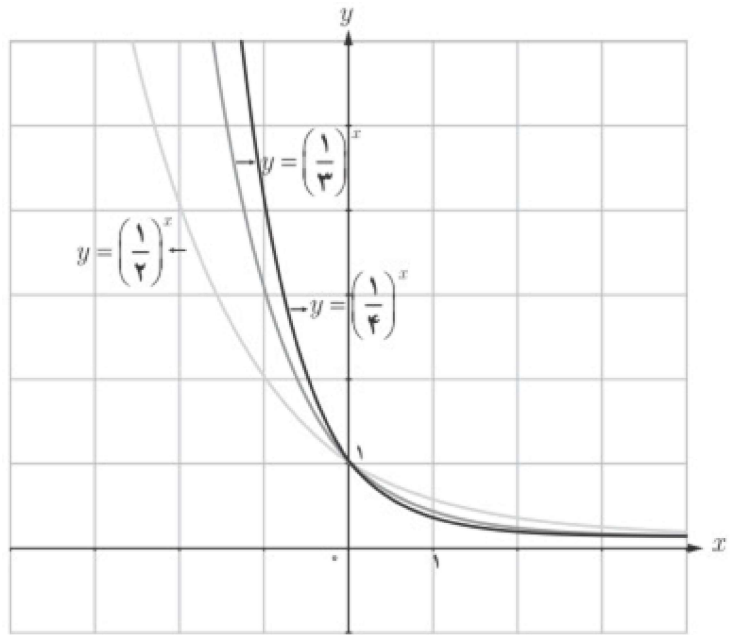
نه سال	۱۸۵۳۵
ده سال	۱۸۸۸۶۹



۶

شبهات: هر دو نمودار محور y را در نقطه‌ی $(0, 1)$ قطع می‌کنند. هر دو با محور x برخورد نمی‌کنند. دامنه‌ی هر دو تابع برابر R و برد هر دو برابر $(0, +\infty)$ است.

تفاوت: در $y = 3^x$ با افزایش x ها، مقدار y ها افزایش می‌یابد (تابع صعودی است) اما در $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ با افزایش مقدار x ها، مقدار y ها کاهش می‌یابد (تابع نزولی است).



۷

شبهات: هر سه محور y ها را در نقطه‌ی $(0, 1)$ قطع می‌کنند. هر سه نزولی هستند. هر سه محور x ها را قطع نمی‌کنند. دامنه‌ی هر سه تابع برابر R و برد هر سه برابر $(0, +\infty)$ است. تفاوت:

$$\begin{cases} x > 0 : \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ x < 0 : \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^x \end{cases}$$

۲, ۴, ۸, ...

۸

$$2^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow n = 11$$

الف) (پس از ۱۱ مرحله)

$$2^8 = 256 \text{ (ب)}$$

پ) در هر مرحله، تعداد سلول‌ها دو برابر تعداد سلول‌های مرحله قبل است. $f(n) = 2^n$

۹

$$100\% - 15\% = 85\%$$

$$a_1 = 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right), r = \frac{85}{100}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \Rightarrow a_n = 15000 \left(\frac{85}{100}\right) \left(\frac{85}{100}\right)^{n-1} = 15000 \left(\frac{85}{100}\right)^n \text{ جمله عمومی}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 15000 \times \left(\frac{85}{100}\right)^5 \cong 6655 / 58$$

۱۰

$$a, \dots, b \Rightarrow \text{جمله } n + 2 \begin{cases} a_{n+2} = ar^{n+1} \\ a_{n+2} = b \end{cases} \Rightarrow ar^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

