



زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

نوع آزمون : تشریحی

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

پایه : دوازدهم تجربی

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

درس : ریاضی

فصل : سوم

۱ حاصل حد زیر را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

$$\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x + [-x]}{x^2 - 25}$$

۲ اگر بازه $(3a - 1, 4b + 7)$ همسایگی راست ۲ و همسایگی چپ ۳۱ باشد، بازه $\{b - a\} - (a, b)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۳ اگر بازه $\{2x - 4\} - (x - 1, x + 7)$ یک همسایگی محذوف عدد یک باشد، مقدار x را به دست آورید.

۴ اگر بازه $(x - 3, 3x - 10)$ یک همسایگی ۵ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} = +\infty \quad \text{ثابت کنید.}$$

۶ اگر باقی مانده چند جمله‌ای $P(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب برابر ۳ و ۵- باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۷ چند جمله‌ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$ را در نظر بگیرید.
الف) آیا $f(x)$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟
ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.
پ) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌هایش بنویسید.

۸ اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 3x^3 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x) = mx^3 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2ax^n + ax^2 + x + 1}{(a + 1)x^n - 3x^2 + 7x + 1} = 2 \quad \text{اگر } (n \in \mathbb{N}) \text{ باشد، مقادیر ممکن برای } n \text{ و } a \text{ را حساب کنید.}$$

۱۰ اگر رابطه تقسیم $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)Q(x) + 2$ برقرار باشد و $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم باشد، باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 1$ کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow (-\delta)^-} \frac{x + [-x]}{x^2 - 2\delta} = \lim_{x \rightarrow (-\delta)^-} \frac{x + \delta}{x^2 - 2\delta} = \lim_{x \rightarrow (-\delta)^-} \frac{x + \delta}{(x - \delta)(x + \delta)} = \frac{1}{-\delta - \delta} = \frac{1}{-1\delta}$$

۱

$$\begin{cases} 3a - 1 = 2 \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 4b + 7 = 31 \Rightarrow 4b = 24 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

۲

$$(a, b) - \{b - a\} \xrightarrow{a=1, b=6} (1, 6) - \{6 - 1\} \Rightarrow (1, 6) - \{5\}$$

$$\{2, 3, 4\}$$

شامل ۳ عدد صحیح است.

$$2x - 4 = 1 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

۳

$$x - 3 < \delta < 3x - 10 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 < \delta \Rightarrow x < \delta + 3 \\ 3x - 10 > \delta \Rightarrow 3x > \delta + 10 \Rightarrow x > \frac{\delta + 10}{3} \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} \delta < x < \delta + 3$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\delta + x^2}}{x^2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{\sqrt{\delta + x^2}}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{\sqrt{\delta + x^2}}{x^2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{\infty} = 0 \end{cases}$$

۵

پس حد تابع برابر $+\infty$ است.

ابتدا ریشه‌های $x - 2$ و $x - 1$ را به دست آورده و در تابع چندجمله‌ای $P(x)$ قرار داده و باقی‌مانده آن‌ها را مساوی ۳ و ۵ - قرار می‌دهیم.

۶

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} P(1) = 3 \\ P(2) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)^2 + 2(1)^2 - a(1) + b = 3 \\ (2)^2 + 2(2)^2 - a(2) + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 - a + b = 3 \\ 8 + 8 - 2a + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -2a + b = -21 \end{cases}$$

$$-a = -21 \Rightarrow a = 21$$

$$-a + b = 0 \Rightarrow -21 + b = 0 \Rightarrow b = 21$$

$$P(x) = x^2 + 2x^2 - 21x + 21$$

پس داریم که:

الف) می‌دانیم اگر $f(a) = 0$ باشد؛ آنگاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش پذیر است.

$$f(1) = 3(1)^2 + 5(1) - 8 = 0 \Rightarrow f(x) \text{ بر } (x - 1) \text{ بخش پذیر است}$$

ب)

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 5x - 8 & x - 1 \\ - (3x^2 - 3x) & \\ \hline 8x - 8 & \\ - (8x - 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

پ) $f(x) = 3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(3x^2 + 8x + 8)$

$$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)(-2) + 3 = -12$$

اگر $n > 2$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$n > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{(a+1)x^n} = \frac{a}{a+1} = 2 \Rightarrow 2a = 2a + 2 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

اگر $n = 1$ باشد، آنگاه داریم:

$$n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^1}{-3x^1} = \frac{a}{-3} = 2 \Rightarrow a = -6$$

اگر $n = 2$ باشد، آنگاه داریم:

$$n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{(a-2)x^2} = 2 \Rightarrow 2a = 2a - 4 \Rightarrow a = -4$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow Q(x) \text{ جایگذاری در } Q(-1) = ?$$

در رابطه $2 + (x - 1)Q(x) = x^2 - 2x + 3$ را مساوی $x = -1$ قرار می‌دهیم:

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 2(-1) + 3 = (-1 - 1)Q(-1) + 2 \Rightarrow 6 = -2Q(-1) + 2 \Rightarrow Q(-1) = -2$$

