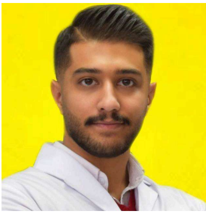


نوع آزمون : تشریحی

پایه : دهم ریاضی

درس : هندسه

فصل : سوم

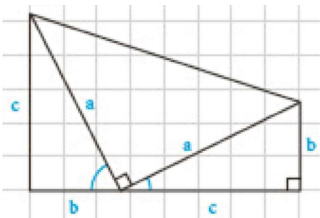
زمان آزمون : ۱۵دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari۱.ir

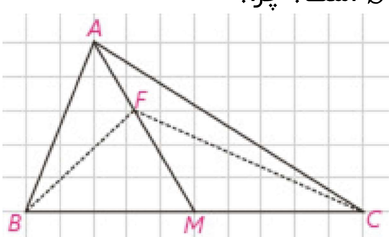
۱ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن‌را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آن‌ها را مقایسه کنید.

۲ مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



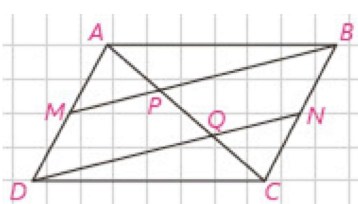
۳ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

۴ الف) نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.
ب) اگر F هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به‌جز نقطه‌ی M باشد، آیا، $S_{\mathrm{FBM}} = S_{\mathrm{FMC}}$ است؟ چرا؟



۵ ثابت کنید اگر وسط های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.
این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

۶ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به‌ترتیب وسط های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $\mathrm{AP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{QC}$.



۷ ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.

۸ ثابت کنید:
هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۹ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی زاویه‌های مقابل دو به دو متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۱۰ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۱ مساحت به روش معمول: $S = m\times n$

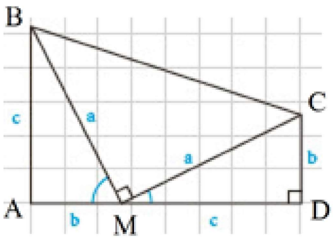
مساحت به کمک قضیه پیک:

$$b = ۲m + ۲n$$

$$i = (m+۱)\times(n+۱) - (۲m+۲n) = \text{mn} - m - n + ۱$$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m+۲n}{۲} - ۱ + (\text{mn} - m - n + ۱) = m + n - ۱ + \text{mn} - m - n + ۱ = \text{mn}$$

۲



$$S_{\text{ABCD}} = \frac{۱}{۲}(\text{AB} + \text{CD})\times \text{AD} = \frac{۱}{۲}(b+c)(b+c) = \frac{۱}{۲}(b+c)^۲$$

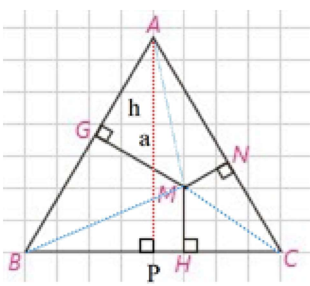
$$S_{\text{ABCD}} = S_{\text{ABM}} + S_{\text{ABM}} + S_{\text{CDM}} + S_{\text{MBC}}$$

$$= \frac{۱}{۲}\text{bc} + \frac{۱}{۲}\text{bc} + \frac{۱}{۲}a^۲ = \text{bc} + \frac{۱}{۲}a^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(b+c)^۲ = \text{bc} + \frac{۱}{۲}a^۲$$

$$\xrightarrow{\times ۲} (b+c)^۲ = ۲\text{bc} + a^۲ \Rightarrow b^۲ + \cancel{۲\text{bc}} + c^۲ = \cancel{۲\text{bc}} + a^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲$$

به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه می‌رسیم.

۳ فرض کنیم M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a باشد. عمودهای MH و MN و MG را بر اضلاع مثلث و ارتفاع AP را رسم می‌کنیم. داریم:



$$S_{\Delta\text{AMB}} = \frac{۱}{۲}\text{AB}\times\text{MG} = \frac{۱}{۲}a\times\text{MG}\,,\; S_{\Delta\text{AMC}} = \frac{۱}{۲}\text{AC}\times\text{MN}$$

$$= \frac{۱}{۲}a\times\text{MN}\,,\; S_{\Delta\text{BMC}} = \frac{۱}{۲}\text{BC}\times\text{MH} = \frac{۱}{۲}a\times\text{MH}$$

$$S_{\Delta\text{AMB}} + S_{\Delta\text{AMC}} + S_{\Delta\text{BMC}} = S_{\Delta\text{ABC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a\times\text{MG} + \frac{۱}{۲}a\times\text{MN} + \frac{۱}{۲}a\times\text{MH}$$

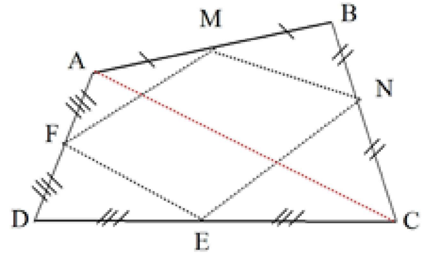
$$= \frac{۱}{۲}a\times\text{AP} \Rightarrow \text{MG} + \text{MN} + \text{MH} = h_a$$

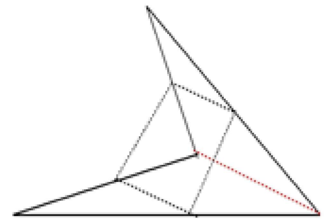
۴ الف) در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است.

$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta\text{ABM}} &= \frac{۱}{۲}\text{AH}\times\text{BM} \\ S_{\Delta\text{ACM}} &= \frac{۱}{۲}\text{AH}\times\text{CM} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{BM=MC}} S_{\Delta\text{ABM}} = S_{\Delta\text{ACM}}$$

ب) بله زیرا FM نیز میانه مثلث BFC است.

۵





برهان: فرض کنیم نقاط F , E , N , M به‌ترتیب وسط های اضلاع AB و BC و CD و AD از چهارضلعی ABCD باشند باید ثابت کنیم چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است. قطر AC را رسم می‌کنیم:

$$\Delta ABC\, ;\, \frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \,||\, AC, MN=\frac{AC}{۲}\ (۲)$$

$$\Delta ACD\, ;\, \frac{DE}{DC}=\frac{DF}{DA}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \,||\, AC, EF=\frac{AC}{۲}\ (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow MN \,||\, EF, MN=EF$$

به عبارت دیگر در چهارضلعی MNEF دو ضلع موازی و مساوی‌اند لذا چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است.

اگر قطرهای چهارضلعی ABCD برهم عمود باشند. چهارضلعی MNEF مستطیل است. زیرا قطرهای چهارضلعی ABCD با اضلاع چهارضلعی MNEF موازی‌اند.

اگر قطرهای چهارضلعی ABCD با هم مساوی باشند. چهارضلعی MNEF لوزی است و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهارضلعی ABCD است.

$$MN=EF=\frac{AC}{۲}, FM=EN=\frac{BD}{۲}$$

$$\Rightarrow MN+NE+EF+FM=۲\left(\frac{AC}{۲}+\frac{BD}{۲}\right)=AC+BD$$

۶ اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در چهارضلعی BMDN داریم:

$$\left.\begin{aligned} AD=BC \overset{\div ۲}{\rightarrow} BN=MD \\ BN \,||\, MD \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{چهارضلعی BMDN متوازی الاضلاع است}} BM \,||\, DN$$

$$\Delta ADQ\, ;\, MP \,||\, DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ}=\frac{AM}{MD}=۱\Rightarrow AP=PQ\ \ ۱$$

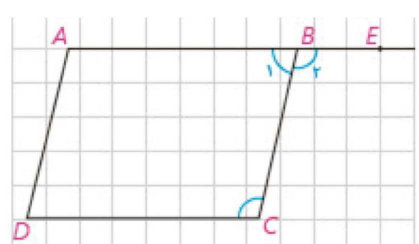
$$\Delta BCP\, ;\, BP \,||\, QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP}=\frac{CN}{NB}=۱\Rightarrow CQ=PQ \overset{\text{از } ۱}{\longrightarrow} AP=PQ=QC$$

۷ در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:

$$\left.\begin{aligned} AB \,||\, DC \\ \text{مورب } BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{B}_۲=\widehat{C} \xrightarrow{\widehat{B}_۱+\widehat{B}_۲=۱۸۰^\circ} \widehat{C}+\widehat{B}_۱=۱۸۰^\circ$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

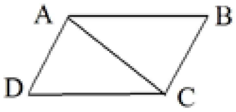
$$\widehat{A}+\widehat{B}_۱=\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{D}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$$



۸

$$\overset{\triangle}{ABC} \cong A\widehat{D}C \Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ BC = AD \end{cases}$$

این ویژگی متوازی‌الاضلاع است، پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

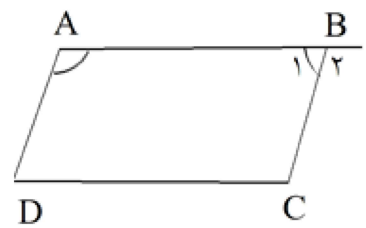


۹ فرض کنید در چهارضلعی ABCD داشته باشیم $\widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$، مجموع زوایای هر چهارضلعی ۳۶۰° است.

داریم:

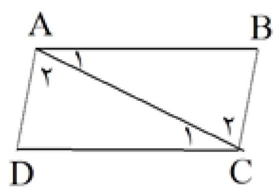
$$\widehat{A} + \widehat{B}_۱ + \widehat{C} + \widehat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۲\widehat{A} + ۲\widehat{B}_۱ = ۳۶۰ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

از طرفی $\widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$ بنابراین $\widehat{A} = \widehat{B}_۲$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$ پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.



۱۰ فرض کنید در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و CD موازی و مساوی باشند. قطرAC را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \\ AC = AC \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \simeq A\overset{\triangle}{D}C \rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{C}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} AD \parallel BC$$



پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.