نوع آزمون : تشریحی

پایه : یازدهم ریاضی

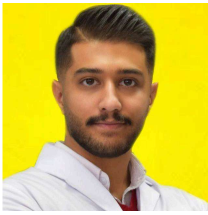
درس : هندسه

فصل : سوم

زمان آزمون : ۱۵دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari۱.ir



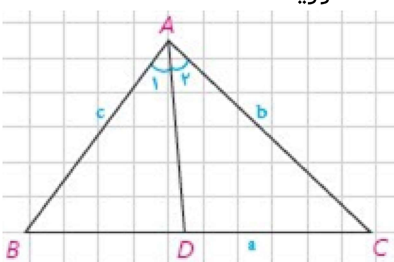
۱) حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.

الف) $BC = ۹ , AC = ۶ , AB = ۱۰$

ب) $BC = ۹ , AC = ۴ , AB = ۸$

پ) $BC = ۱۷ , AC = ۱۵ , AB = ۸$

۲) در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A$$

$$= \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots \times \text{Sin}\,\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots \times \text{Sin}\,\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A = AD.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}(\ldots + \ldots)$$

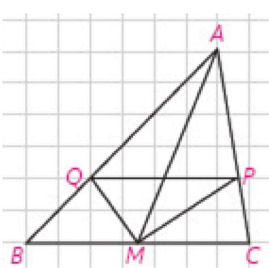
$$\Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\text{Sin}\,A}{(\ldots + \ldots)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} = \frac{۲\,AB.\,AC.\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(\ldots + \ldots)\,\text{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = \ldots$$

$$\Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)\ d_a = \frac{۲\,bc.\,\text{Cos}\,\frac{A}{۲}}{b + c}$$

۳) دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۴) در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\text{Sin}\,B$ را پیدا کنید.

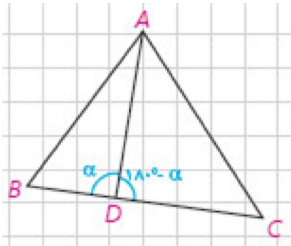
۵) در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



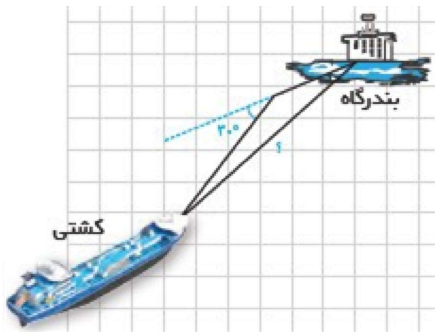
۶ در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$\mathrm{AB}^{۲}.\mathrm{DC}+\mathrm{AC}^{۲}.\mathrm{DB}=\mathrm{AD}^{۲}.\mathrm{BC}+\mathrm{DB}.\mathrm{DC}.\mathrm{BC}$ (قضیه‌ی استوارت)

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.



۷ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



۸ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\widehat{A}=۹۰^{\circ})$ با ارتفاع $\mathrm{AH}=h_a$ داریم:

$$\frac{۱}{h_a^{۲}}=\frac{۱}{b^{۲}}+\frac{۱}{c^{۲}}$$

۹ در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $A\widehat{M}B$ و $A\widehat{M}C$ را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازی‌اند.

۱۰ در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

۱

الف) $a=۹\,,b=۶\,,c=۱۰$

$a^{۲}=۸۱\,,b^{۲}+c^{۲}=۱۳۶\Rightarrow a^{۲}<b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow \widehat{A}<۹۰^\circ$

ب) $a=۹\,,b=۴\,,c=۸$

$a^{۲}=۸۱\,,b^{۲}+c^{۲}=۸۰\Rightarrow a^{۲}>b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow \widehat{A}>۹۰^\circ$

پ) $a=۱۷\,,b=۱۵\,,c=۸$

$a^{۲}=۲۸۹\,,b^{۲}+c^{۲}=۲۸۹\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow \widehat{A}=۹۰^\circ$

۲

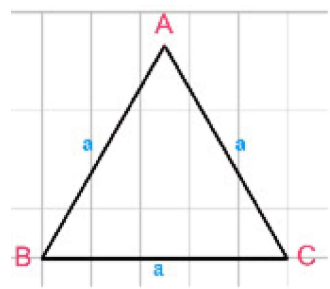
$$S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{ABD}}+S_{\mathrm{ACD}}$$

$$\frac{۱}{۲}\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A=\frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A=\mathrm{AD.\,Sin}\,\frac{A}{۲}(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\Rightarrow \mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A}{(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}}$$

$$=\frac{۲\,\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,\frac{A}{۲}\mathrm{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}}\Rightarrow \mathrm{AD}=d_a\Rightarrow (\text{نیمساز راس }A)d_a=\frac{۲\,\mathrm{bc.\,Cos}\,\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۳

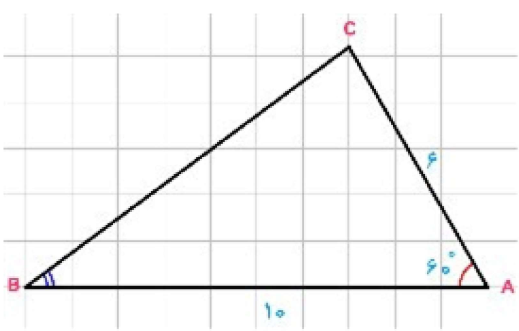


$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=a\Rightarrow P_{\mathrm{ABC}}=\frac{۳a}{۲}$$

$$S_{\mathrm{ABC}}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{۳a}{۲}-a\right)^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{a}{۲}\right)^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

۴



الف) $\mathrm{BC}^{۲}=\mathrm{AC}^{۲}+\mathrm{AB}^{۲}-۲\,\mathrm{AC.\,AB.\,Cos}\,A$

$$\mathrm{BC}^{۲}=۳۶+۱۰۰-۲\times۶\times۱۰\times\frac{۱}{۲}=۷۶\Rightarrow \mathrm{BC}=۲\sqrt{۱۹}$$

ب) $\frac{۱}{۲}\mathrm{AC.\,AB.\,Sin}\,A\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵\sqrt{۳}$

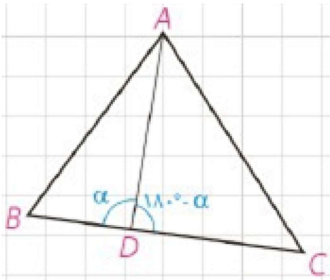
پ) $\frac{\mathrm{Sin}\,B}{b}=\frac{\mathrm{Sin}\,A}{a}\Rightarrow\frac{\mathrm{Sin}\,B}{۶}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}}\Rightarrow \mathrm{Sin}\,B=\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}}\Rightarrow \mathrm{Sin}\,B=\frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۵ در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QB}\\ \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AQ}{QB}=\frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۶



$$\overset{\triangle}{ABD}: AB^۲=AD^۲+DB^۲-۲\,AD.DB.\cos\alpha\xrightarrow{\times DC}$$

$$AB^۲.DC=DC.AD^۲+DC.DB^۲-۲\,DC.AD.DB.\cos\alpha\,(۱)$$

$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲=AD^۲+CD^۲-۲\,AD.DC.\cos(۱۸۰^\circ-\alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲.DB=DB.AD^۲+DB.DC^۲+۲\,DB.AD.DC.\cos\alpha\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^۲.DC+AC^۲.DB=DC.AD^۲+DC.DB^۲-\cancel{۲\,DC.AD.DB.\cos\alpha}$$

$$+DB.AD^۲+DB.DC^۲+\cancel{۲\,DB.AD.DC.\cos\alpha}\Rightarrow AB^۲.DC+AC^۲.DB$$

$$=AD^۲\underbrace{(DC+DB)}_{BC}+BD.DC\underbrace{(DC+DB)}_{BC}$$

$$AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲.BC+DB.DC.BC$$

$$DC=DB=\frac{a}{۲},\ AC=b,\Rightarrow AB=c$$

$$\Rightarrow\frac{a}{۲}\times c^۲+\frac{a}{۲}\times b^۲=AD^۲\times a+\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times a\Rightarrow\frac{a}{۲}(c^۲+b^۲)=\frac{a}{۲}\left(۲AD^۲+\frac{a^۲}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow b^۲+c^۲=۲AD^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

$$AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\ \text{km}\ ,\ BC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰\ \text{km}$$

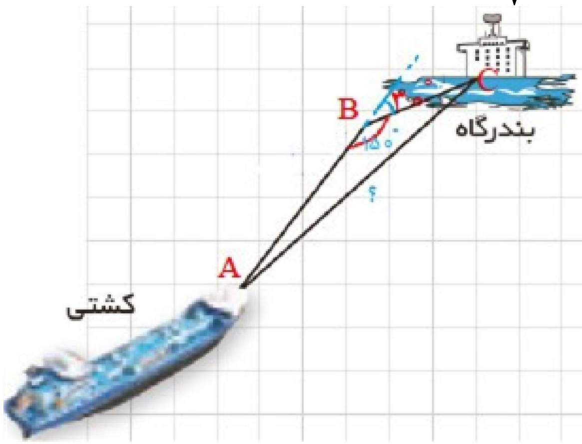
$$AC^۲ = ۶۰^۲ + ۲۰^۲ - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos ۱۵۰^\circ$$

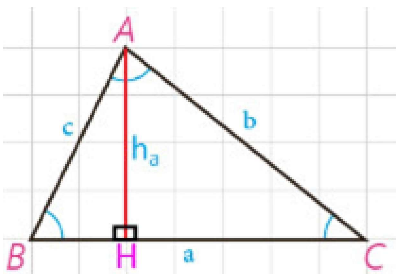
$$= ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲ \times ۱۲۰۰ \times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} = ۴۰۰(۱۰ + ۳\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC = ۲۰\sqrt{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}$$

۷





$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{۱}{۲}bc \\ S &= \frac{۱}{۲}a.h_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}$$

۸

$$(bc)^۲ = (ah_a)^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = a^۲h_a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲c^۲ = (b^۲ + c^۲)h_a^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = b^۲h_a^۲ + c^۲h_a^۲ \xrightarrow{\div b^۲c^۲h_a^۲}$$

$$\frac{b^۲c^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} = \frac{b^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} + \frac{c^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} \Rightarrow \frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{c^۲} + \frac{۱}{b^۲}$$

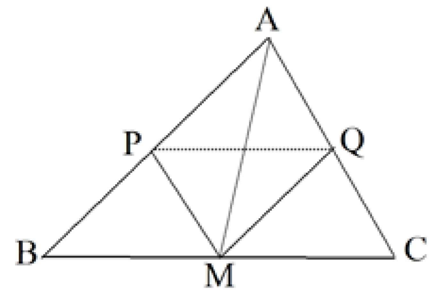
۹

$$\overset{\Delta}{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC}=\frac{AQ}{QC} \quad ۰/۲۵$$

$$\xrightarrow{MC=MB} \frac{AQ}{QC}=\frac{AP}{PB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\overset{\Delta}{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB}=\frac{AP}{PB} \quad ۰/۲۵$$



۱۰

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMB} : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP}=\frac{AM}{MB} \\ \overset{\triangle}{AMC} : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC} \end{array}\right\} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$