

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم ریاضی

درس : هندسه

فصل : سوم

۱ ثابت کنید اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم \vec{a} بر امتداد \vec{b} ، برابر خود \vec{a} می‌شود.

۲ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-2 < y \leq -1$ و $y < -x^2 + 1$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

۳ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 2$ را رسم کنید.

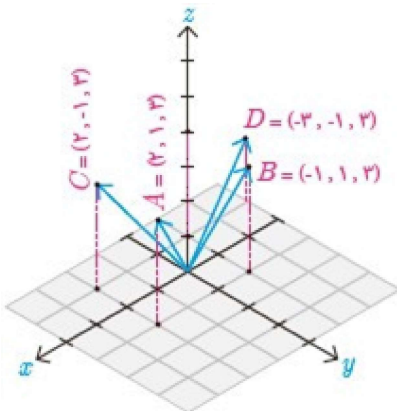
۴ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (3, 5, 7)$ ، $B = (5, 5, 0)$ و $C = (-4, 0, 4)$ داده شده است را بیابید.

۵ بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض‌اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$ ، $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۶ برداری عمود بر دو بردار $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ و $\vec{a} = (1, -3, 2)$ پیدا کنید.

۷ اگر $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ و $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{a} = (1, -3, 4)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید.

۸ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.
الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی ABCD را بنویسید.
ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح ABCD هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.



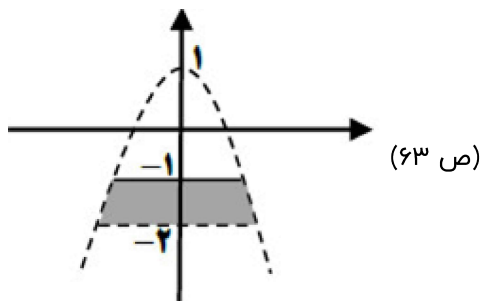
۹ بردارهای $a = (1, -1, 0)$ و $b = (0, 1, 2)$ مفروضند. تصویر بردار $a + b$ را بر امتداد بردار b تعیین کنید.

۱۰ نشان دهید بردارهای a ، b و c که در زیر تعریف شده‌اند دوجه‌دو برهم عمودند.
 $a = (2, 1, -1)$, $b = (3, 7, 13)$, $c = (20, -29, 11)$

$$\vec{a} = r \vec{b}$$

۱

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{(r \vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{r |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = r \vec{b} = \vec{a} \quad (\text{ص } ۸۰)$$

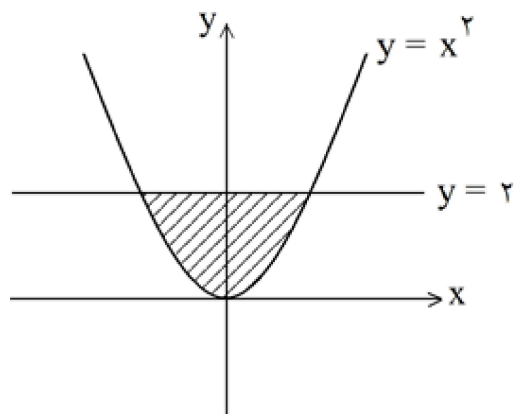


۲

رسم نمودار (ص ۵۵)

۳

$y = x^2$ نمودار یک سهمی است و $y \geq x^2$ داخل این سهمی است و $y \leq 2$ نقاط زیر خط $y = 2$ هستند، پس ناحیه $x^2 \leq y \leq 2$ هاشورخورده می‌باشد.



۴

$$\vec{AB} = (2, 0, -7) \quad \vec{AC} = (-7, -5, -3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -7 \\ -7 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -35i + 55j - 10k \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

$$= \sqrt{(-35)^2 + 55^2 + (-10)^2} = \sqrt{4350}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{4350} = \frac{5\sqrt{174}}{2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

5

$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \pm \sqrt{6}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow \vec{c} = (13, 1, -5), \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{a}$$

6

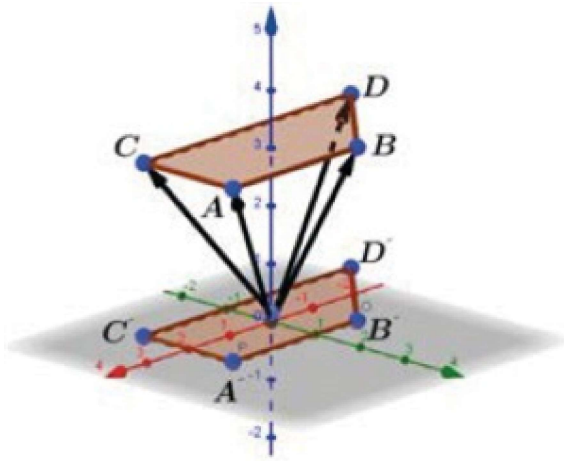
$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} = (3-1, -4+1, 2+4) = (2, -3, 6)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = (1)(2) + (-3)(-3) + (6)(6) = 2 + 9 + 36 = 47$$

$$|\vec{m}|^2 = 2^2 + (-3)^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49$$

$$P_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = P_{\vec{m}} \vec{a} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}|^2} \vec{m} = \frac{47}{49} (2, -3, 6) = \frac{47}{49} (2, -3, 6) = \left(\frac{94}{49}, -\frac{141}{49}, \frac{282}{49}\right)$$

7



الف) $A = (2, 1, 3) \quad B = (-1, 1, 3)$

$C = (2, -1, 3) \quad D = (-3, -1, 3)$

$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$DC = \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \quad CA = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

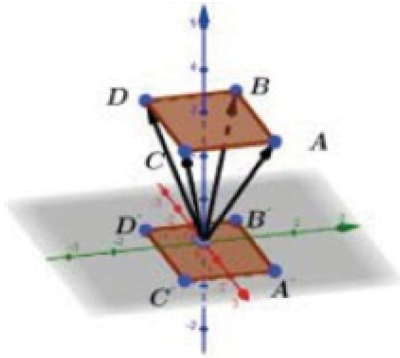
۸

$A' = (2, 1, 0) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (2, -1, 0) \quad D' = (-3, -1, 0)$

ب) $A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ y = x + 2 \\ z = 0 \end{cases}$

$D'C' = \begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad C'A' = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$

پاسخ سوال اگر مختصات نقطه‌ی D را تغییر دهیم یعنی به صورت $D = (-1, -1, 3)$ باشد.



$A = (2, 1, 3) \quad B = (-1, 1, 3)$

$C = (2, -1, 3) \quad D = (-1, -1, 3)$

$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \quad BD = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow ABCD = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$CD = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \quad AC = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$A' = (2, 1, 0) \quad B' = (-1, 1, 0) \quad C' = (2, -1, 0) \quad D' = (-1, -1, 0)$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A'B'C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \quad A'C' = \begin{cases} x = 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$u = (a + b) = (1, 0, 2)$

$u' = \frac{u \cdot b}{b \cdot b} = \frac{4}{\delta} (1, 0, 2) = \left(\frac{4}{\delta}, 0, \frac{8}{\delta} \right)$

۹

۱۰ اگر حاصلضرب داخلی دو بردار غیرصفر برابر صفر باشد، آنگاه دو بردار بر هم عمودند.

$$a \cdot b = 6 + 7 - 13 = 0 \Rightarrow a \perp b$$

$$a \cdot c = 40 - 29 - 11 = 0 \Rightarrow a \perp c$$

$$b \cdot c = 60 - 203 + 143 = 0 \Rightarrow b \perp c$$

