



زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم تجربی

درس : ریاضی

فصل : چهارم

۱) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 + kx + 1$ در بازه $[0, 2]$ برابر ۲ است. الف) k را حساب کنید.

ب) آهنگ لحظه‌ای این تابع را در $x = -\frac{k}{4}$ حساب کنید.

۲) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = x^3 + ax + 3$ در بازه $[1, 3]$ برابر ۳ است. الف) a را حساب کنید.

ب) آهنگ لحظه‌ای این تابع $x = 4$ را به دست آورید.

۳) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$\text{الف) } f(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + x + 1} \right)^2$$
$$\text{ب) } g(x) = (\sqrt{4x+1})(x^2 - 3x + 9)$$

۴) معادله خط مماس بر $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ به دست آورید.

۵) معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ را در نقطه A به طول ۲ بنویسید.

۶) معادله خط مماس بر نمودار $f(x) = x - \sqrt{x}$ در نقطه A برابر $6y - 5x + 9 = 0$ است. مختصات این نقطه را به دست آورید.

۷) معادله خط مماس بر نمودار $f(x) = 3x^2 + x$ در نقطه A برابر $y = 7x - 3$ است. مختصات این نقطه را به دست آورید.

۸) معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}$ را در نقطه A به طول ۴ بنویسید.

۹ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = x - 1$ باشد، حاصل $(f - g)'(1) + \left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را حساب کنید.

۱۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
- تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

الف ۱

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{8 + 2k + 1 - 1}{2} = \frac{8 + 2k}{2} = 4 + k = 2 \Rightarrow k = -2$$

ب) برای یافتن آهنگ لحظه‌ای از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

$$f'\left(-\frac{k}{2}\right) = f'(1) = 2 - 2 = 0$$

الف ۲

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 + 3a + 3 - (1 + a + 3)}{2} = \frac{8 + 2a}{2} = 4 + a = 3 \Rightarrow a = -1$$

ب) برای یافتن آهنگ لحظه‌ای از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(4) = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$$

الف) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + x + 1}\right)^2$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \left(\frac{x^2}{x^2 + x + 1}\right) \left(\frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 1)x^2}{(x^2 + x + 1)^2}\right)$$

ب) $g(x) = (\sqrt{4x+1})(x^2 - 3x + 9)$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x^2 - 3x + 9) + (2x - 3)\sqrt{4x+1}$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \sqrt{2-1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{(x-1)^2}} \xrightarrow{x=2} m = \frac{1}{3}$$

$$A(2, 1) \text{ و } m = \frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{2^2 + 1}{2 - 1} \Rightarrow y_1 = 5$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - (1)(x^2+1)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=2} y' = \frac{4(2-1) - (1)(4+1)}{(2-1)^2} = \frac{4-5}{1} = -1$$

$$\Rightarrow m = -1$$

معادله خط مماس

$$\rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = -1(x - 2)$$

$$\Rightarrow y - 5 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 7$$

۳

۴

۵

۶ باید شیب خط را برابر مشتق $f(x)$ قرار دهیم و x را حساب کنیم.

$$6y - 5x + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2} \Rightarrow m = \frac{5}{6}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{6} - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 9 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$$

$$A(9, 6)$$

۷ باید شیب خط را برابر مشتق $f(x)$ قرار دهیم و x را حساب کنیم.

$$f'(x) = m \Rightarrow 6x + 1 = 7 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 + 1 = 4$$

$$A(1, 4)$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{4+1}{8-3}} = \sqrt{1} = 1$$

$$y' = \frac{(1)(2x-3) - (2)(x+1)}{(2x-3)^2} \xrightarrow{x_1=4} y' = \frac{5-10}{2^2} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{-5}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 2 = -5x + 20 \Rightarrow 2y + 5x = 22$$

$$\Rightarrow 2y + 5x = 22$$

$$f(x) = x^5 + x \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 1$$

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times 1 - 6 \times 1}{1} = -1$$

$$(f - g)'(1) = f'(1) - g'(1) = 3 - 1 = 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) + (f - g)'(1) = -1 + 2 = 1$$

درست ۱۰

