

زمان آزمون : ۱۵ دقیقه

شماره پشتیبانی تلگرام : ۰۹۰۳-۴۲۶-۱۹۹۶

آکادمی دکتر اکبری Akbari.ir

نوع آزمون : تشریحی

پایه : دوازدهم تجربی

درس : ریاضی

فصل : ششم

۱ خط به معادله $4x - 3y + m = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ را قطع نمی‌کند. حدود m را حساب کنید.

۲ نقطه $A(1, 3)$ روی محیط دایره $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m - 1 = 0$ قرار دارد: الف) m و k را حساب کنید. ب) مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورید.

۳ اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی محیط دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2k - 1 = 0$ باشد: الف) k را حساب کنید. ب) شعاع و مرکز دایره را حساب کنید.

۴ اگر نقطه $A(1, -2)$ خارج از دایره $x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 2$ باشد، حدود m را حساب کنید.

۵ اگر خطی در نقطه $(-8, 5)$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 2)$ مماس باشد، معادله خط مماس را بنویسید.

۶ دایره C_1 به مرکز $(2, 1)$ و شعاع ۳ با دایره C_2 به مرکز $(-1, 5)$ مماس بیرون هستند. الف) اندازه شعاع C_2 را به دست آورید. ب) معادله گسترده دایره C_2 را بنویسید.

۷ خط به معادله $x + y + 2 = 0$ ، دایره به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$ را در دو نقطه قطع می‌کند. مختصات این نقاط را به دست آورید.

۸ طول وترى که خط $2x + y - 2 = 0$ از دایره $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 64$ جدا می‌کند را به دست آورید.

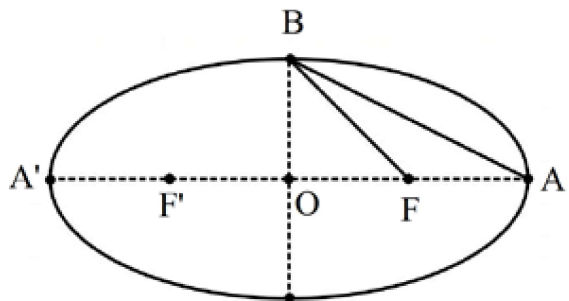
۹ در بیضی زیر، کانون‌ها به مختصات $F(5, 1)$ و $F'(-7, 1)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(9, 1)$ می‌باشد.

الف) مختصات مرکز و فاصله کانونی را حساب کنید.

ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.

ج) خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

د) مساحت مثلث BFA را محاسبه کنید.



۱۰ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\lim_{x \rightarrow 9^-} (2x - 1)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x + 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 7} [x]$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x - 3}$

وقتی خط دایره را قطع نمی‌کند یعنی خارج دایره قرار دارد و برای آنکه خط خارج دایره باشد، باید فاصله خط تا مرکز دایره را بزرگتر از شعاع قرار دهیم.

۱

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow O(2, -1)$$

$$d > R \Rightarrow \frac{|2 + 2 + m|}{\sqrt{5}} > 2 \Rightarrow |m + 4| > 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow m + 4 < -2\sqrt{5} \text{ یا } m + 4 > 2\sqrt{5} \Rightarrow m < -4 - 2\sqrt{5} \text{ یا } m > -4 + 2\sqrt{5}$$

الف) در معادله دایره باید ضریب x^2 و y^2 برابر باشد. بنابراین:

۲

$$k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$$

برای آنکه $A(1, 3)$ روی محیط دایره باشد، باید $x = 1$ و $y = 3$ را درون معادله دایره قرار دهیم و حاصل برابر صفر است.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow (1)^2 + (3)^2 + 4(1) - 6(3) + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 9 + 4 - 18 + m - 1 = 0 \Rightarrow m = 5$$

ب)

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow O(-2, 3)$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{4 + 9 - 4} = \sqrt{9} = 3$$

الف) اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره باشد، به جای x و y اعداد -1 و 1 قرار می‌دهیم و حاصل برابر صفر است.

۳

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1)^2 + (1)^2 - 2(-1) + 4(1) + 2k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 1 + 2 + 4 + 2k - 1 = 0 \Rightarrow 2k = -7 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$$

ب)

$$O \begin{cases} h = \frac{-D}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \\ k = \frac{-E}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{12.25 + 4 - 1} = \sqrt{15.25}$$

الف) اگر نقطه $A(1, -2)$ خارج از دایره باشد باید به جای x و y عدد 1 و -2 قرار دهیم و حاصل بزرگتر از صفر باشد.

۴

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow (1)^2 + (-2)^2 - 4(1) - 2(-2) + m - 2 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + 4 - 4 + 4 + m - 2 > 0 \Rightarrow m > -3$$

از طرفی باید رابطه شعاع مثبت باشد تا دایره تشکیل شود.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow D^2 + E^2 - 4F > 0 \Rightarrow (-4)^2 + (-2)^2 - 4(m - 2) > 0$$

$$\Rightarrow 16 + 4 - 4m + 8 > 0 \Rightarrow -4m > -28 \Rightarrow m < 7$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -3 < m < 7$$

۵ باید نقطه $(-۸, ۵)$ روی محیط دایره باشد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{۵ - ۲}{-۸ - ۱} = \frac{۳}{-۹} = -\frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس می کنیم}} m' = ۳$$

معادله خط مماس برابر است با:

$$y - y' = m'(x - x_1) \Rightarrow y - ۵ = ۳(x + ۸) \Rightarrow y - ۵ = ۳x + ۲۴ \Rightarrow y = ۳x + ۲۹$$

۶ الف

$$O, O_r = \sqrt{(۲ + ۱)^2 + (۱ - ۵)^2} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

$$O, O_r = R_1 + R_r \Rightarrow ۵ = ۳ + R_r \Rightarrow R_r = ۲$$

ب

$$O_r(-۱, ۵) \text{ و } R_r = ۲ \Rightarrow (x + ۱)^2 + (y - ۵)^2 = ۴$$

$$\Rightarrow x^2 + ۲x + ۱ + y^2 - ۱۰y + ۲۵ - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + ۲x - ۱۰y + ۲۲ = ۰$$

$$x + y + ۲ = ۰ \Rightarrow y = -۲ - x$$

۷

در معادله دایره به جای y ، $x - ۲$ قرار می‌دهیم.

$$x^2 + (-۲ - x)^2 + ۶x - ۲(-۲ - x) + ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + ۴x + ۴ + ۶x + ۴ + ۲x + ۸ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^2 + ۱۲x + ۱۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^2 + ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)(x + ۴) = ۰$$

$$\begin{cases} x = -۲ \Rightarrow y = -۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow A(-۲, ۰) \\ x = -۴ \Rightarrow y = -۲ + ۴ = ۲ \Rightarrow B(-۴, ۲) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{۶۴} = ۸ \text{ شعاع}$$

۸

$$\text{فاصله } O \text{ تا خط} d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-۲ - ۱ - ۲|}{\sqrt{۴ + ۱}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$\text{طول وتر } AB = ۲\sqrt{R^2 - d^2} = ۲\sqrt{۶۴ - ۵} = ۲\sqrt{۵۹}$$

۹ الف

$$F(۵, ۱) \Rightarrow O\left(\frac{۵ + (-۷)}{۲}, \frac{۱ + ۱}{۲}\right) \Rightarrow O(-۱, ۱)$$

$$FF' = ۲c = ۵ - (-۷) = ۱۲$$

ب) معادله قطر کوچک بیضی برابر $x = -۱$ است.

ج) فاصله A تا O برابر a است، بنابراین:

$$a = ۹ - (-۱) = ۱۰ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$

$$۲c = ۱۲ \Rightarrow c = ۶$$

د

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow ۱۰۰ = b^2 + ۳۶ \Rightarrow b = ۸$$

$$S_{\triangle BFA} = \frac{b(a-c)}{۲} = \frac{۸(۱۰-۶)}{۲} = \frac{۸ \times ۴}{۲} = ۱۶$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 9^-} (2x - 1) = 2(9) - 1 = 17$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x + 1} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 7} [x] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 7^+} [x] = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 7^-} [x] = 6 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7} [x] = \text{حد ندارد}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)} = 9 + 9 + 9 = 27$$

