صد تست هندسه ۳

آمادگی آزمون ۱۸ آذر قلم چی

آشنایی با مقاطع مخروطی : تست ۱ تا ۴۰

دایره : ۴۱ تا ۱۰۰

۱) صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی هر دو نیمه‌ی بالایی و پایینی آن‌را برش می‌دهد. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام است؟

۱) هذلولی ۲) دو خط متقاطع ۳) سهمی ۴) یک خط راست

۲) نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی در این صفحه که از A و B به یک فاصله و از C به D نیز به یک فاصله باشند کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) بی‌شمار نقطه ۲) صفر نقطه ۳) یک نقطه ۴) چهار نقطه

۳) فاصله‌ی دو خط موازی d و d' از یک‌دیگر برابر ۲ واحد است. چند نقطه در صفحه‌ی شامل این دو خط وجود دارد به طوری‌که مجموع فواصل آن از دو خط d و d' برابر با ۲ باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴) کدام نادرست است؟

۱) مکان هندسی نقاطی که دو مماس با زاویه بین ۶۰° بر دایره‌ای به مرکز o و شعاع ۳ می‌توان رسم کرد، دایره‌ای به مرکز o و شعاع ۶ است.

۲) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه مفروض بر دایره‌ای به مرکز o و شعاع ۳ مماس است دایره‌ای به مرکز o است.

۳) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در درون دایره به مرکز o و شعاع ۳ مماس است، دایره‌ای به مرکز o است.

۴) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ۳ که بر خط d مماس است، دو خط موازی به فاصله ۳ از خط d است.

۵) هرگاه صفحه، غیر موازی با مولد، محور را قطع کند، مقطع حاصل کدام است؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) دایره یا نقطه ۴) بیضی یا دایره یا نقطه

۶) صفحه‌ای بر محور یک سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام است؟

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۷) مکان هندسی پای ارتفاع‌های وارد از مبدأ مختصات بر خطوطی که از نقطهٔ $M(۲,۳)$ می‌گذرد، کدام است؟

۱) خطی به معادلهٔ $۲x - ۳y = ۱$ ۲) دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳y = ۰$

۳) خطی به معادلهٔ $۳x - ۲y = ۱$ ۴) دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۳x - ۲y = ۰$

۸) نقاط A، B و C و خط d در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت به گونه‌ای که از این سه نقطه به یک فاصله و از خط d به فاصلهٔ یک واحد باشد؟

۱) هیچ یا یک ۲) یک یا بی‌شمار ۳) همواره یک ۴) هیچ یا بی‌شمار

Akbari.ir

۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ $A(۲,۰)$ و $B(۱,۱)$ برابر ۱۰ باشد، یک دایره به شعاع R است. R کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۱۰ دو نقطه‌ی متمایز A و A' و همچنین دو خط موازی d و d' در صفحه وجود دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از دو نقطه‌ی A و A' به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند؟

۱) صفر یا یک نقطه
۲) صفر، یک یا بی‌شمار نقطه
۳) یک یا دو نقطه
۴) صفر، یک یا دو نقطه

۱۱ مکان هندسی تمام نقاطی که با پاره‌خط معلوم AB یک مثلث منفرجه‌الزاویه می‌سازند به طوری‌که زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع AB منفرجه باشد، کدام است؟

۱) محیط مربعی به قطر AB به‌جز نقاط A و B
۲) محیط دایره‌ای به قطر AB به‌جز نقاط A و B
۳) سطح مربعی به قطر AB به‌جز نقاط روی محیط آن و قطر AB
۴) سطح دایره‌ای به قطر AB به‌جز نقاط روی محیط آن و قطر AB

۱۲ دایرهٔ C به مرکز O با شعاع R و خط d در صفحه مفروض هستند. حداکثر چند وتر به طول a در این دایره می‌توان رسم کرد که وسط آن روی خط d قرار گیرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۳ اگر پاره‌خط AB با صفحه P زاویه غیر عمود بسازد، مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله واحد از صفحه P و به فاصله برابر از دو نقطه A و B هستند، کدام است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) یک خط ۴) دو خط

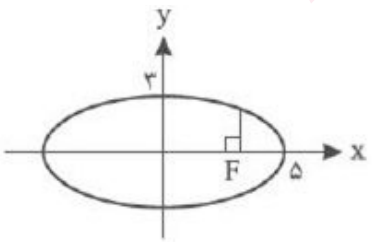
۱۴ مکان هندسی نقاطی که به فاصله واحد از خط L بوده و روی صفحه‌ای متقاطع و غیر عمود با خط L باشد، کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) یک خط ۴) دو خط

۱۵ یک بیضی بر چهار خط $x=-۱$، $x=۵$، $y=۳$ و $y=-۱$ مماس شده است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر مختصات یکی از کانون‌های این بیضی است؟

۱) $(۱,\sqrt{۵})$ ۲) $(\sqrt{۵},۱)$ ۳) $(۲-\sqrt{۵},۱)$ ۴) $(۱,۲-\sqrt{۵})$

۱۶ مرکز بیضی زیر در مبدأ مختصات قرار دارد و F کانون بیضی است. اگر اشعهٔ نوری به‌صورت عمود بر محور x ها از F بر بدنهٔ داخلی بیضی بتابد، انعکاس نور از کدام نقطه عبور خواهد کرد؟



۱) $(۴,۰)$ ۲) $(-۴,۰)$ ۳) $(\sqrt{۲},۰)$ ۴) $(-\sqrt{۲},۰)$

Akbari.ir

۱۷ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

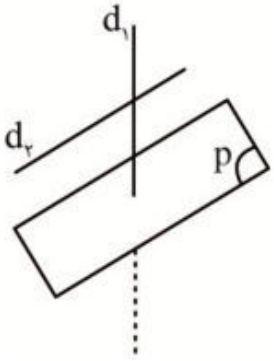
الف- اگر خط d بر خط L عمود نباشد، سطح حاصل از دوران d حول محور L، یک سطح مخروطی است.

ب- سطح مقطع صفحهٔ P با یک سطح مخروطی، یک منحنی است، اگر و تنها اگر صفحه شامل رأس سطح مخروطی نباشد.

ج- حداکثر دو نقطه در صفحه وجود دارد که روی دایرهٔ $C(O,۲)$ باشد و از خط d واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ۳ باشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸ اگر در شکل زیر $d_۲ \| p$ و $d_۱$ و $d_۲$ متقاطع باشند، شکل حاصل از برخورد دوران یافته خط $d_۲$ حول خط $d_۱$ و صفحه p کدام است؟



۱) نیم خط ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) سهمی

۱۹ مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقاطی مانند O در صفحه‌ی مثلث ABC به طوری که $\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \frac{AB}{AC}$ کدام است؟

۱) یک خط ۲) دو خط عمود بر هم ۳) یک دایره ۴) دو خط موازی

۲۰ در شکل روبه‌رو داریم $PM = ۶$ و $MN = ۱۶$ و $SP = ۸$ نقطه‌ی A از N و S به یک فاصله و از خط L به فاصله‌ی ۱۰ می‌باشد. اندازه‌ی مینیمم پاره‌خط SA کدام است؟

۱) $\frac{۷\sqrt{۱۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۱۳}}{۳}$

۳) $\frac{۷\sqrt{۳}}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۱۳}$

۲۱ اگر در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ نقاط B، C و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر BC ثابت باشند، مکان هندسی رأس A در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ چگونه است؟

۱) دو خط موازی ۲) نیم‌دایره ۳) دایره ۴) عمودمنصف BC

۲۲ مکان هندسی مرکز دایره‌ای که بر یک دایره‌ی مفروض و بر یک قطر ثابت آن مماس باشد، چه شکلی است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

Akbari1.ir

۳۳ دو خط d و d' در نقطه‌ی O بر هم عمودند. نقاط A و B به‌ترتیب بر خطوط d و d' طوری جابه‌جا می‌شوند که طول AB همواره برابر با L می‌باشد. مکان هندسی محل همرسی میانه‌های مثلث OAB کدام است؟

۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{۳}$ ۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{۲}$ ۳) دایره‌ای به شعاع $\frac{۲L}{۳}$ ۴) دایره‌ای به شعاع L

۳۴ کدام عبارت درست است؟

۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می‌گیرند.

۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحه‌ی عمود بر آن دو خط قرار می‌گیرند.

۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشد، روی منحنی سهمی شکل قرار دارند.

۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی آن از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند،روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

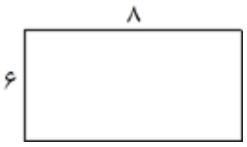
۳۵ در صورتی که صفحه‌ی قاطع یک سطح مخروطی موازی محور آن و غیرمنطبق با آن باشد، مقطع مخروطی ایجاد شده کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) سهمی

۳۶ خط d با صفحه‌ی p موازی و با خط Δ متقاطعِ غیر عمود است. فصل مشترک صفحه‌ی p با شکل حاصل از دوران d حول Δ کدام است؟ $(d \not\subset p)$

۱) دایره ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) بیضی

۳۷ روی محیط مستطیل زیر چند نقطه وجود دارد به طوری که فاصلهٔ آن‌ها از محل برخورد قطره‌های مستطیل به فاصلهٔ $\frac{۷}{۲}$ باشد؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) صفر

۳۸ مثلث ABC درون نیم‌دایره‌ای قرار دارد، به طوری که BC قطر نیم‌دایره است. اگر ضلع BC ثابت و A روی نیم‌دایره حرکت کند، مکان هندسی مرکز ثقل مثلث (نقطه‌ی G) کدام است؟

۱) نیم‌دایره به شعاع AC ۲) نیم‌دایره به شعاع $\frac{BC}{۶}$ ۳) پاره‌خط موازی BC ۴) نیم‌دایره‌ای به قطر $\frac{BC}{۶}$

۳۹ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک از این دو نقطه نیست در صفحه مفروض‌اند. حداکثر چند نقطه وجود دارد که از A و B به فاصلهٔ یکسان بوده و از خط d به فاصلهٔ ۵ واحد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

Akbari.ir

۳۰ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۵ بر دایره‌ای ثابت به شعاع ۲ رسم کرد کدام است؟

۱) دو خط موازی به فاصلهٔ ۶ از مرکز دایره
۲) دو نقطه به فاصلهٔ ۶ از مرکز دایره
۳) دایره‌ای به مرکز دایره ثابت و شعاع $\sqrt{۲۹}$
۴) دایره‌ای به مرکز دایره ثابت و شعاع $\sqrt{۲۱}$

۳۱ خط d با خط Δ موازی است. خط d را حول Δ دوران می‌دهیم. صفحه‌ی P، شکل حاصل را قطع می‌کند. مقطع حاصل کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) بیضی
۲) یک خط راست
۳) مستطیل
۴) دایره

۳۲ نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ واحد از خط d در یک صفحه مفروض است. فاصله‌ی نقاطی که از A به فاصله ۸ واحد و از d به فاصله‌ی ۶ واحد باشند، چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۱۵}$
۲) $۲\sqrt{۱۵}$
۳) $۲\sqrt{۷}$
۴) $۴\sqrt{۷}$

۳۳ در مثلث ABC، ضلع AB به طول ۳ ثابت است. اگر طول میانه‌ی BM برابر ۲ باشد، مکان هندسی رأسی C، کدام است؟

۱) دایره‌ای به شعاع ۴ به‌جز دو نقطه
۲) دایره‌ای به شعاع ۶ به‌جز دو نقطه
۳) پاره‌خطی به طول ۴ به‌جز دو نقطه
۴) پاره‌خطی به طول ۶ به‌جز دو نقطه

۳۴ صفحه‌ای بر محور یک سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند. فصل مشترک (مقطع) حاصل کدام است؟

۱) سهمی
۲) دایره
۳) بیضی
۴) هذلولی

۳۵ دو خط d و d' با فاصله‌ی ۴ واحد از یک‌دیگر در صفحه واقع هستند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی هریک از آن‌ها از خط d، ۳ برابر فاصله‌ی آن‌ها از خط d' است، دو خط موازی است. فاصله‌ی بین این دو خط کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۳۶ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۶ مفروض است. مکان هندسی نقاطی داخل مثلث که فاصله‌ی هریک از آن‌ها از اضلاع مثلث یک واحد است را P می‌نامیم. نسبت مساحت ناحیه‌ی P به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\frac{۴-\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}-۲}{۳}$

۳۷ نقطهٔ A روی خط d در یک صفحه قرار دارند. نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m و از خط d به فاصلهٔ n باشند، رأس‌های یک مربع را به‌وجود می‌آورند، $\frac{m}{n}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $۲\sqrt{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

۳۸ در برخورد یک صفحه با یک رویه‌ی مخروطی چندتا از شکل‌های «نقطه، دایره، بیضی، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع، سهمی، هذلولی» می‌توانند فصل مشترک صفحه با رویه‌ی مخروطی باشند؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

۳۹ نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. چند نقطه در صفحه موجود است که از نقطه‌ی A و خط d به فاصله‌ی معلوم و برابر باشند؟

۱) حداکثر ۴
۲) حداکثر ۱
۳) حداقل ۱
۴) حداکثر ۲

Akbari.ir

۴۰ روی محیط یک متوازی‌الاضلاع، k نقطه وجود دارد که از محل تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع به فاصله‌ی ثابت a باشد، k کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۱ دایره‌ای بر دو نقطه‌ی $(۰,۲)$ و $(۴,۰)$ گذشته و بر محور xها مماس است. این دایره محورyها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۲ چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور xها و دایره‌ی $(x-۴)^۲+(y-۳)^۲=۴$ مماس باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۴۳ نزدیک‌ترین نقطه روی منحنی $(x-۹)^۲+(y-۷)^۲=۴$ از محور x به چه فاصله‌ای قرار دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

۴۴ دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(-۳,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۲)$

۴۵ نقطه‌ی $A(-۱,۴)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $۲x-۳y+۱=۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۷}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y=۲$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) $۳,-۵$ ۲) $۲,-۴$ ۳) $-۱\pm\sqrt{۲}$ ۴) $-۱\pm\sqrt{۳}$

۴۶ خط مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x-۲y-۵=۰$ در نقطهٔ $A(-۱,۴)$ واقع بر آن، از کدام یک از نقاط زیر عبور می‌کند؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۴,۱)$ ۳) $(۲,۳)$ ۴) $(-۴,۴)$

۴۷ وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱۷$، با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(۶,-۱)$ بر خط به معادلهٔ $۲x-y=۳$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۴۸ دایرهٔ C بر دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y=۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایرهٔ C از نقطهٔ $(۸,۷)$ می‌گذرد. شعاع دایرهٔ C کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۴۹ شعاع دایره‌ای که مرکز آن نقطه‌ی $O(۲,۰)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$ مماس بیرونی باشد، کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}-۱$ ۳) $\sqrt{۳}-۱$ ۴) $۲-\sqrt{۲}$

۵۰ مرکز دایره‌ای که محور xها را در نقاطی با طول‌های ۲ و ۴- و محور yها را در نقاطی به عرض‌های ۴ و ۲- قطع می‌کند، روی خط $(m-۱)x+y=۳$ واقع است. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

Akbari.ir

۵۱ رأس‌های مثلث ABC، به‌ترتیب $B(۱,-۱)$، $C(۵,-۱)$ و $A(۳,۱)$ است. اگر $o\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ مرکز و R شعاع دایره محیطی مثلث باشد، $\alpha+\beta+R$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲ دایره‌ای به مرکز $O(۲,۱)$ که از خط $۴x+۳y+۴=۰$ وتری به‌طول ۸ واحد جدا می‌کند، محورx ها را در نقاط M و N قطع کرده است. طول پاره‌خط NM کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

۵۳ بیشترین فاصلهٔ نقاط دو دایره به معادلات $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۵۴ اگر $\frac{m}{m-۱}=۰$ معادله‌ی $x^۲+y^۲+x+y$ معادله‌ی یک دایره باشد، m کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۲) $-\frac{۱۸}{۱۷}$ ۳) $\frac{۳۰}{۱۹}$ ۴) $-\frac{۲۱}{۱۹}$

۵۵ اگر خط $y=x-۱$ بر دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲x+m=۰$ مماس باشد، شعاع دایره چه‌قدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۵۶ کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره $(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۴$ از خط $۶x+۸y+۲۲=۰$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۷ $A(۱,-۲)$ نقطه‌ای از محیط دایره‌ای است که معادله تمام قطرهای آن به صورت $(m-۲)x+(m+۱)y=۶$ می‌باشد، مساحت این دایره کدام است؟

۱) ۲۰π ۲) ۲۵π ۳) ۳۰π ۴) ۳۵π

۵۸ معادله دایره‌ای که مرکز آن $O(-۱,۱)$ بوده و روی خط به معادله‌ی $۳x+۴y=۱۶$ وتری به طول ۸ جدا کند، خط افقی $y=-۳$ را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹ طول مماس مشترک خارجی دایره‌ی C به شعاع $۳\sqrt{۲}$ که بر نیمسازهای ناحیه‌ی اول و دوم مماس است و دایره‌ی C' به معادله‌ی $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۷-۲\sqrt{۳}}$ ۲) $\sqrt{۴۷-۲\sqrt{۳}}$ ۳) $\sqrt{۴۵-۶\sqrt{۲}}$ ۴) $\sqrt{۱۵+۶\sqrt{۲}}$

۶۰ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل آن از دو خط عمود بر هم $x+۲y+۱=۰$ و $۲x-y+۲=۰$ برابر ۵ باشد، کدام است؟

۱) دایره‌ای به مرکز $(-۱,۰)$ ۲) دایره‌ای به مرکز $(-۰/۳,۰/۲)$

۳) سهمی قائم به رأس $(-۱,۰)$ ۴) سهمی قائم به رأس $(-۰/۳,۰/۲)$

Akbari.ir

۶۱) دایره‌ای به مرکز $(۱,۳)$ بر روی خط راست $۵x+۱۲y=۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$ جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) ۸

۶۲) نقطهٔ $A(۳,۴)$ خارج دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-ky+۱=۰$ قرار دارد. اگر حاصل‌ضرب دورترین و نزدیک‌ترین فاصلهٔ A از دایره برابر ۲۴ باشد، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۶۳) مثلث ABC از برخورد سه خط به معادلات $x=۱$، $y=۲$ و $x+۲y=۹$ ساخته می‌شود. اگر معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۶۴) اگر $k^۲x^۲+y^۲-۲ax+۴ky=۰$ معادلهٔ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۱۳}$ باشد که مرکز آن در ربع دوم دستگاه مختصات واقع است. $a+k$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۴

۶۵) دایره‌ای که مرکز آن $(۰,۲)$ باشد و از خط به معادلهٔ $x+y=۴$ وتری به طول $۴\sqrt{۲}$ جدا کند، از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۳,۱)$ ۲) $(۱,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۳,-۱)$

۶۶) کوچک‌ترین دایره‌ای که از نقاط $A(۲,۰)$ و $B(-۲,۰)$ می‌گذرد بر خط $y=mx+۴$ مماس است، m کدام است؟

۱) ±۲ ۲) $\pm\sqrt{۳}$ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ ۴) ±۱

۶۷) مساحت دایره‌ای که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $x-y=۱$ بر آن مماس باشد، کدام است؟

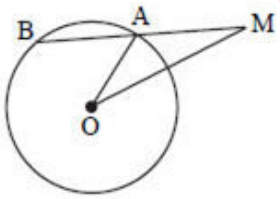
۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ۴π

۶۸) معادله‌ی دایره‌ی گذرا از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ که خط $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد، کدام است؟

۱) $(x-۱)^۲+y^۲=۱۰$ ۲) $x^۲+(y-۱)^۲=۱۰$

۳) $(x+۱)^۲+y^۲=۱۰$ ۴) $x^۲+(y+۱)^۲=۱۰$

۶۹) از نقطه‌ی $M(۲,۳)$ قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱$ را در نقاط A و B قطع کند. اگر $AB=۱$ باشد، مساحت مثلث OAM کدام است؟ (O مرکز دایره است).



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

Akbari.ir

۷۰ اگر دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲+۲x-۶y-۱۵=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x+۶y+c=۰$ مماس خارج باشند؛ مقدار c چه عددی است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۳ ۴) ۹

۷۱ اگر نقاط متغیر E و F بر روی $۴x+۳y-۱=۰$ و دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۲=۰$ باشند؛ کوتاه‌ترین فاصله‌ی E تا F چه‌قدر است؟

۱) $۱/۸-\sqrt{۳}$ ۲) ۱/۲ ۳) $۲\sqrt{۳}-۱/۸$ ۴) $۱/۸+\sqrt{۳}$

۷۲ دایره‌ای بر خطوط $x=۵$، $x=-۱$ و از پایین $y=۷$ مماس است. این دایره از خط $x=۴$ چه طولی را جدا می‌کند؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۵}$ ۴) $۸\sqrt{۵}$

۷۳ خط $y=x$ روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات وتری به طول ۸ واحد جدا می‌کند، در این‌صورت این دایره از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(۳,۳)$ ۲) $(\sqrt{۳},\sqrt{۱۳})$ ۳) $(\sqrt{۲},\sqrt{۱۲})$ ۴) $(\sqrt{۵},\sqrt{۷})$

۷۴ دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲ay+a=۰$ بر محور y ها مماس است. اگر این دایره حول خط $y=-۱$ دوران کند، حجم شکل حاصل کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

۷۵ نقطهٔ $A(۳,a)$ روی دایره‌ای به مرکز $O(۵,۶)$ قرار دارد.به ازای چند مقدار صحیح a، نمودار این دایره از ناحیهٔ چهارم دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) بی‌شمار

۷۶ مرکز دایره‌ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(۶,۳)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۲x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۷۷ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(۰,۰)$ و $(۳,۱)$ و $(۱,-۳)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳}$

۷۸ نقطه‌ی $M(۲\sqrt{۵},b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y=۳x$ و $x=۳y$ مماس است. شعاع دایره‌ی کوچک‌تر کدام می‌باشد؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲/۵\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲/۵\sqrt{۲}$

۷۹ دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات بر دو خط به معادلات $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(-۳,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(-۱,۲)$

Akbari.ir

۸۰ نقطه‌ی $S(۲,۱)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور yها است و از نقطه‌ی $(۰,۵)$ می‌گذرد. معادله‌ی خط هادی آن کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۴}$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۳}{۴}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$

۸۱ معادلهٔ دایره به مرکز $O(۱,-۱)$ که روی خط $x+۲y=۴$ وتری به طول $۲\sqrt{۳}$ ایجاد کند، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۶$ ۲) $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۸=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۸$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۶=۰$

۸۲ دایره‌های $x^۲+y^۲+۲y=۳$ و $x^۲+y^۲+۲x=۳$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

۱) $x=y$ ۲) $x=۱+y$ ۳) $x=-y$ ۴) $x=۱-y$

۸۳ وضعیت نسبی دو دایره $x^۲+y^۲+۲x-۲y-۷=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۲y+۱=۰$ چگونه است؟

۱) مماس بیرون ۲) متقاطع ۳) مماس درون ۴) متخارج

۸۴ نقطه‌ی $M(۱,-۲)$ وسط وتری از دایره‌ی $۲x^۲+ay^۲-۱۲x+۸y+۸=۰$ است. طول این وتر چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

۸۵ وضعیت دو دایره‌ی $(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$ و $x^۲+y^۲+۴x+۲y+۱=۰$ نسبت به هم چگونه است؟

۱) متخارج هستند ۲) مماس درون ۳) مماس بیرون ۴) متقاطع

۸۶ طول پاره‌خط واصل پای مماس‌های وارد بر دایره $x^۲+y^۲-۲x=۰$ از نقطهٔ $M(-۲,۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$

۸۷ اگر دو دایره گذرا از نقطهٔ $(۲,۱)$ بر هر دو محور مختصات مماس باشند، طول مماس مشترک خارجی آن‌ها کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۸۸ بیش‌ترین فاصلهٔ بین نقاط دایره‌های $x^۲+y^۲+۲x-۲y+۱=۰$ و $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۹=۰$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۸۹ به‌ازای چند مقدار عدد صحیح m، $x^۲+y^۲+۲x-my+m+۱=۰$ ، معادله یک دایره نیست؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

۹۰ بیشترین مقدار عدد صحیح k چقدر باشد تا خط $x+y=۴$ ، دایره‌ی $x^۲+y^۲-۲y-k=۰$ را قطع نکند؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۱ مساحت دایره‌ای که خطوط $x+y=-۲$ و $x-y=۶$ دو قطر آن بوده و خط $۴x+۳y=۲۱$ بر آن مماس باشد، کدام است؟

۱) ۱۶π ۲) ۴۹π ۳) ۲۵π ۴) ۳۶π

۹۳ تمام قطرهای یک دایره با معادله‌ی $(m+۲)y+(m-۱)x+۳=۰$ بیان می‌شوند. اگر این دایره از نقطه $A(۵,۲)$ عبور کند، مساحت دایره کدام است؟

۱) ۱۸π ۲) ۲۰π ۳) ۲۴π ۴) ۲۵π

۹۴ محیط دایره‌ی محیطی مثلث ABC که در آن $A(۴,۲)$، $B(-۴,۶)$ و $C(-۱,۷)$، کدام است؟

۱) ۲۰π ۲) ۱۵π ۳) ۱۰π ۴) ۵π

۹۵ چند مقدار طبیعی برای طول مرکز دایره‌ای که روی محور x ها قرار دارد و بر نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مماس است و شعاع آن کم‌تر از $\sqrt{۲}$ می‌باشد، وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

۹۶ نقطهٔ $A(۲,۱)$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲+۴x=۰$ را در نظر بگیرید. اگر M نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا A و N دورترین نقطهٔ دایره تا A باشد، آن‌گاه حاصل $AM\times AN$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\sqrt{۱۲}$ ۳) ۱۳ ۴) $\sqrt{۱۳}$

۹۷ معادلهٔ دایرهٔ $C: x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰$ مفروض است. شعاع دایره‌ای که بر محورهای مختصات در ناحیهٔ اول مماس باشد و با دایرهٔ C مماس داخل باشد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۲}$

۹۸ معادله‌های خط مماس و خط قائم در نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ C به ترتیب $x+۲y-۸=۰$ و $۲x-y-۱=۰$ می‌باشد. اگر دایرهٔ C بر محور y ها مماس باشد، بزرگ‌ترین شعاع دایرهٔ C چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$

۹۹ دو دایره‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ و $x^۲+y^۲+۴x-۴y=۰$ نسبت به هم چه وضعیتی را دارند؟

۱) متخارج ۲) مماس خارج ۳) متقاطع ۴) مماس داخل

۱۰۰ فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ از نقطه‌ی $A(۳,۶)$ دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. طول بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام گزینه است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۱۰۱ دایره‌ای به مرکز $(۱,-۲)$ با دایره‌ی $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۳=۰$ مماس داخل است. شعاع دایره کدام گزینه می‌تواند باشد؟

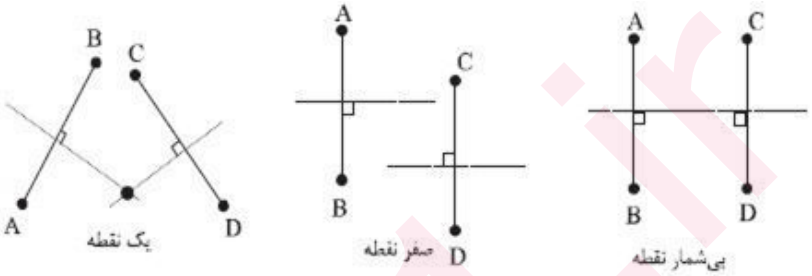
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

Akbari.ir

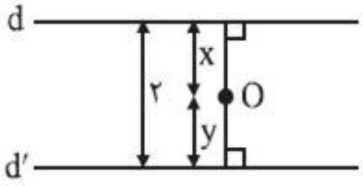
۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو نیمه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد در این صورت فصل مشترک حاصل هذلولی است ولی دقت کنید که در صورت سؤال عنوان شده است که صفحه شامل محور سطح مخروطی است که در این صورت فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع می‌باشد.

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی ثابت A و B در صفحه به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

بنابراین در حالت کلی محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط های AB و CD (در صورت برخورد) جواب می‌باشد که به صورت‌های زیر می‌تواند باشد:



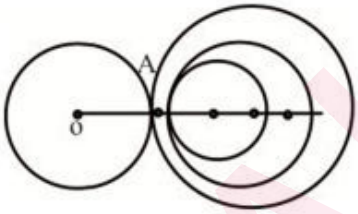
۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام نقاط موجود در ناحیه‌ی بین دو خط ، مکان هندسی مطلوب است.



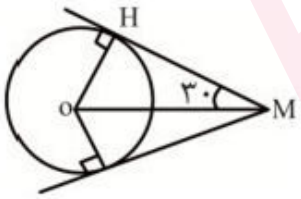
$$x + y = ۲$$

۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در گزینه ۲، اگر نقطه مفروض را A بنامیم، مرکز دایره‌ها OA و امتداد آن است.

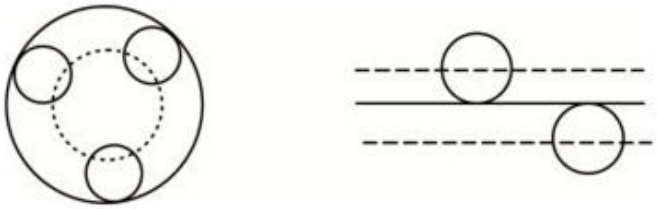


مکان نقطه M در گزینه ۱ دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM است.



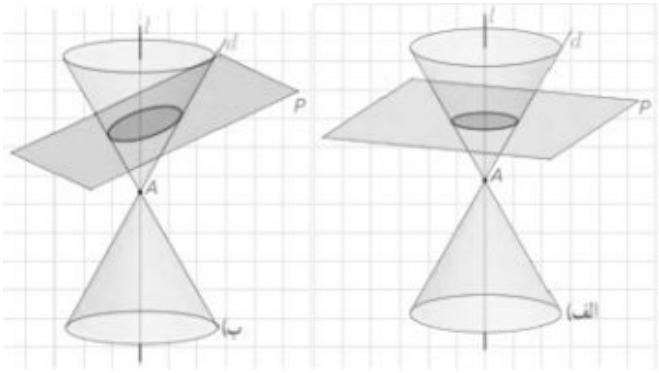
$$\mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{Sin}\ ۳۰} = ۶$$

گزینه ۳ و ۴ به شکل زیر هستند:



Akbari.ir

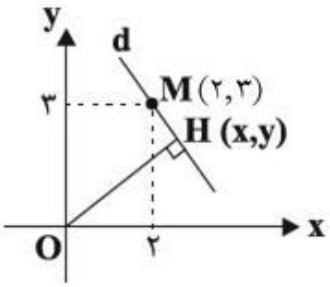
۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



اگر این صفحه از مرکز نقطه A بگذرد محل برخورد یک نقطه است.

۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطهٔ $H(x,y)$ پای ارتفاع وارد از مبدأ مختصات بر خطی گذرنده از نقطهٔ $M(۲,۳)$ باشد، در این صورت داریم:



$$m_{OH}=\frac{y-۰}{x-۰}=\frac{y}{x}\,,m_{MH}=\frac{y-۳}{x-۲}$$

چون MH بر OH عمود است، پس:

$$m_{OH}\times m_{MH}=-۱\Rightarrow \frac{y}{x}\times\frac{y-۳}{x-۲}=-۱\Rightarrow \frac{y^۲-۳y}{x^۲-۲x}=-۱$$
$$\Rightarrow x^۲-۲x=۳y-y^۲\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۳y=۰$$

۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط قرارداشته باشند، هیچ نقطه‌ای نمی‌توان یافت که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. اگر سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط قرار نداشته باشند، آن‌گاه این سه نقطه یک مثلث تشکیل می‌دهند و محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث، از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است. از طرفی مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ یک واحد هستند، دو خط موازی با d در طرفین آن می‌باشند.
در این حالت اگر یکی از این دو خط موازی با d از محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث عبور کند، مسئله یک جواب دارد و در غیر این صورت فاقد جواب است.

Akbari.ir

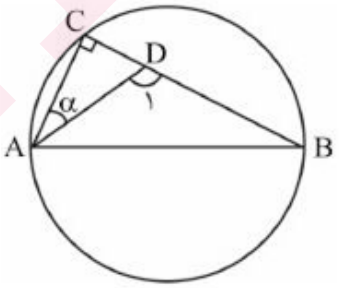
۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر نقطهٔ $M(x,y)$ دارای ویژگی مورد نظر باشد، آنگاه داریم:

$$AM^{۲}+BM^{۲}=۱۰$$
$$\Rightarrow (x-۲)^{۲}+(y-۰)^{۲}+(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۴x+۴+y^{۲}+x^{۲}-۲x+۱+y^{۲}-۲y+۱=۱۰$$
$$\Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}-۶x-۲y-۴=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۲} x^{۲}+y^{۲}-۳x-y-۲=۰$$
$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳)^{۲}+(-۱)^{۲}-۴(-۲)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۸}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}$$

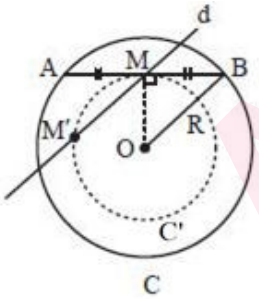
۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و A' به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AA' است. هم‌چنین مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله باشد خط بین دو خط d و d' و به موازات آن‌هاست. اگر این خط را d'' بنامیم جواب نهایی مسئله محل برخورد عمودمنصف AA' و خط d'' است که در واقع اوضاع نسبی دو خط است که تعداد نقاط مشترک آن‌ها صفر، یا بی‌شمار یا یک نقطه می‌باشد.

۱۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم نقاط روی محیط دایره، مکان هندسی برای رأس قائمه و ساختن مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین هر نقطه داخل دایره با پاره‌خط AB، زاویه‌ای منفرجه به ما می‌دهد که برابر $\widehat{D}_۱=\alpha+\widehat{C}$ است و $\widehat{C}=۹۰^\circ$ است. ($\widehat{D}$ زاویه خارجی برای مثلث ACD است.)



۱۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وسط وتر AB از دایرهٔ C را M نامیده، مکان هندسی آن به‌صورت زیر است:



$$\begin{cases} MB=\frac{a}{۲} \\ OB=R \end{cases} \Rightarrow OM^{۲}=R^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}$$
$$\Rightarrow OM=\sqrt{R^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}} \Rightarrow \begin{cases} O \text{ ثابت} \\ M \text{ متحرک} \end{cases}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M محیط دایرهٔ C' به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}$ است.

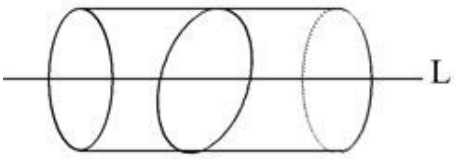
$$\Rightarrow C'\left(O,\sqrt{R^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}\right) \Rightarrow M\in C'$$

اشتراک C' با خط d جواب مسئله است که حداکثر دو نقطه می‌تواند باشد.

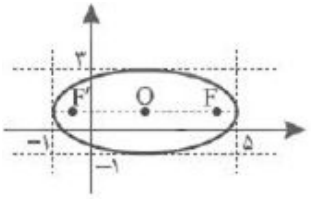
۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاط A و B در دو طرف صفحه P را در نظر بگیرید. محل برخورد دو صفحه $P_۱$ و $P_۲$ به موازات P و فاصله واحد از آن و صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB، دو خط می‌شود که مکان مورد نظر این سؤال است.

Akbari.ir

۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاطی که به فاصله واحد از خط L می‌باشد، سطح استوانه‌ای را تشکیل می‌دهد که محل برخورد آن با صفحه‌ای قاطع با خط L و غیر عمود بر L یک بیضی می‌شود.



۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مختصات مرکز بیضی $O\left(\frac{-۱+۵}{۲}, \frac{-۱+۳}{۲}\right)$ یعنی $O(۲,۱)$ به‌دست می‌آید. از طرفی طول قطر بزرگ، $۲a = ۶$ یعنی $a = ۳$ و طول قطر کوچک، $۲b = ۴$ یعنی $b = ۲$ خواهد بود.



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

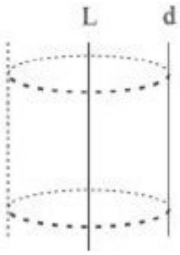
اگر از مرکز بیضی به اندازهٔ $\sqrt{۵}$ به چپ و راست برویم، به کانون‌ها می‌رسیم، پس مختصات کانون‌ها به‌صورت $F(۲+\sqrt{۵},۱)$ و $F'(۲-\sqrt{۵},۱)$ به‌دست می‌آید.

۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی اگر شعاع نوری از یکی از کانون‌ها به بدنهٔ بیضی تابانده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت.

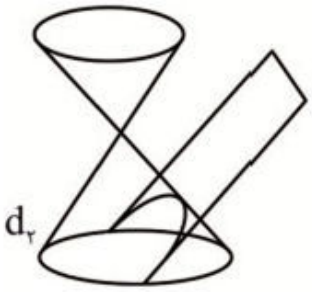
$$a = ۵, b = ۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = ۹ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$$

پس $F(۴,۰)$ و $F'(-۴,۰)$ یعنی اشعه از نقطهٔ $(-۴,۰)$ خواهد گذشت.

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزارهٔ «الف» نادرست است زیرا d و L می‌توانند متقاطع نباشند. یک مثال نقض: اگر $d \| L$ باشد، سطح حاصل سطح استوانه‌ای است ولی گزاره‌های (ب) و (ج) درست هستند.

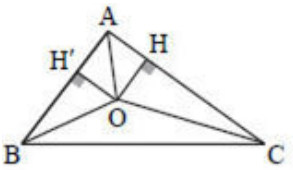


۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل حاصل از تقاطع صفحه موازی مولد و سطح مخروطی، سهمی می‌شود.



Akbari.ir

۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از O عمودهای OH و OH' را بر اضلاع AC و AB وارد می‌کنیم. بنابر فرض سؤال داریم:

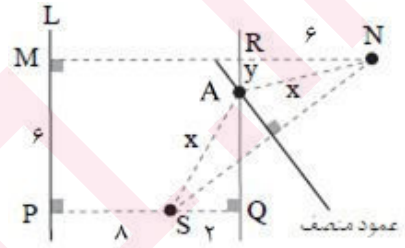


$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{S_{\overset{\triangle}{OAC}}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}OH' \times AB}{\frac{1}{2}OH \times AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow OH = OH'$$

پس مشخص است که ارتفاع دو مثلث باید برابر باشد پس نقطه‌ی O روی نیم‌سازهای درونی و برونی زاویه‌ی A قرار دارد. بنابراین مکان هندسی O دو خط عمود بر هم است.

۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از S و N به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط SN است و مکان هندسی نقاطی که از خط L به فاصله‌ی ۱۰ می‌باشند دو خط موازی با L در طرفین آن است. نقطه‌ی A نقطه‌ی تلاقی این دو مکان جواب این سؤال است.

مسلماً نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف SN با خط موازی L که در طرف دیگر آن است، موردنظر این سؤال نیست. با توجه به شکل داریم:



$$\overset{\triangle}{ASQ} : x^2 = AQ^2 + SQ^2 \Rightarrow x^2 = (6-y)^2 + 2^2 \quad (1)$$

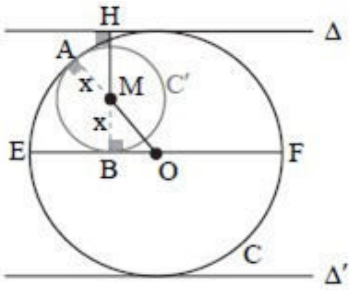
$$\overset{\triangle}{ARN} : x^2 = AR^2 + RN^2 \Rightarrow x^2 = y^2 + 6^2 \xrightarrow{\text{از } (1)} x = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط C و B ثابت‌اند پس BC ثابت است. نتیجه این‌که وسط BC یعنی نقطه‌ی M ثابت است، با توجه به ثابت بودن اندازه‌ی میانه AM نقطه‌ی A وابسته به M با فاصله‌ی ثابت است. پس مکان هندسی A دایره به مرکز M و شعاع AM است.

۲۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی C' بر دایره‌ی C و قطر EF از آن مماس است، برای یافتن مکان هندسی مرکز دایره‌ی C' دو مماس به موازات EF بر دایره‌ی C رسم می‌کنیم، Δ و Δ':

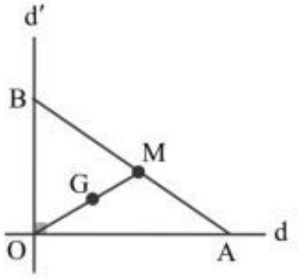
$$OA = HB \Rightarrow OM + \cancel{MA} = HM + \cancel{MB} \Rightarrow MO = MH$$

این رابطه یعنی نقطه‌ی M از نقطه‌ی O و از خط ثابت Δ به یک فاصله است. پس مکان مطلوب قسمتی از یک سهمی است.



Akbari.ir

۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مثلث AOB قائم‌الزاویه و $AB = L$ می‌باشد. می‌دانیم که اگر G محل همرسی میانه‌ها باشد، $OG = \frac{۲}{۳} OM$ می‌باشد. از طرفی OM میانه‌ی وارد بر وتر می‌باشد. داریم:

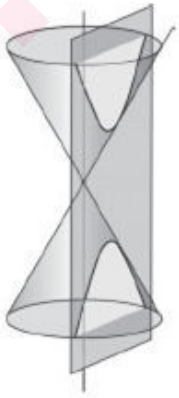


$$OM = \frac{AB}{۲} = \frac{L}{۲}, OG = \frac{۲}{۳} \times \frac{L}{۲} = \frac{L}{۳}$$

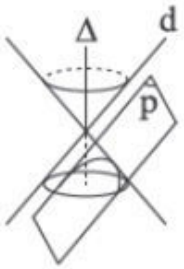
پس مکان هندسی G، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{L}{۳}$ می‌باشد.

۳۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

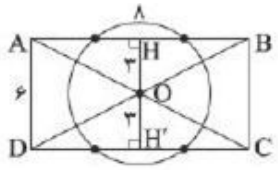


۳۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط d و Δ متقاطع هستند. پس از دوران d حول Δ یک سطح مخروطی ایجاد می‌شود. صفحه‌ی p موازی با d است، پس مقطع حاصل یک سهمی است. مسلماً اگر d برصفحه‌ی p واقع باشد، آنگاه فصل مشترک یک خط است که بنابرفرض $d \not\subset p$ این حالت رخ نمی‌دهد.



Akbari1.ir

۳۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مجموعه نقاطی از صفحه که همگی دارای این ویژگی مشترک هستند که فاصله‌شان از نقطه‌ای ثابت مانند O به اندازهٔ ثابت r باشند، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع r.

$$\left.\begin{matrix}AB=۸\\AD=۶\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰\Rightarrow OA=۵$$

$$OH=OH'=\frac{۶}{۲}=۳$$

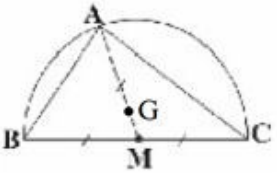
حال اگر به مرکز O و شعاع $\frac{۷}{۲}=۳/۵$ دایره‌ای رسم کنیم، محیط مستطیل را در ۴ نقطه قطع می‌کند پس ۴ جواب داریم.

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پاره‌خط AM (میانه‌ی BC) برابر شعاع دایره است و با تغییر محل A طول AM تغییر نمی‌کند.

پس طول MG نیز ثابت است.

$$AM=R=\frac{BC}{۲}\Rightarrow MG=\frac{AM}{۳}=\frac{BC}{۲}\times\frac{۱}{۳}=\frac{BC}{۶}$$

در نتیجه مکان هندسی مرکز ثقل مثلث، یک نیم‌دایره به شعاع $\frac{BC}{۶}$ است.

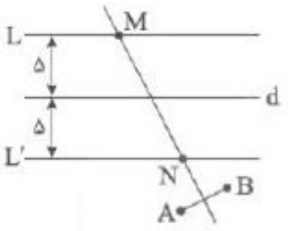


Akbari.ir

۲۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

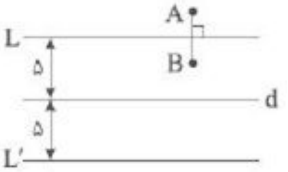
مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به فاصلهٔ یکسان هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. هم‌چنین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ یکسان هستند، دو خط موازی با آن خط است.

مطابق شکل، دو خط L و 'L از خط d به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر قرار دارند و عمودمنصف AB این دو خط را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند.



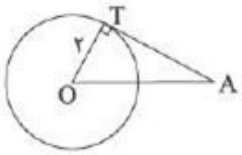
حالت‌های خاص: اگر عمودمنصف AB موازی d باشد، مسئله جواب ندارد.

اگر عمودمنصف A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از خط d باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر نقطهٔ A یکی از نقاط قابل قبول از مکان هندسی باشد، مطابق شکل از قبل می‌دانیم خط مماس همیشه در نقطهٔ تماس بر شعاع عمود است، پس مثلث OAT قائم‌الزاویه است و طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$OA = \sqrt{۴ + ۲۵} = \sqrt{۲۹}$$

بنابراین مکان هندسی نقاطی مانند A که از آن‌ها می‌توان مماس‌هایی به طول ۵ بر دایره رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲۹}$ است.

۳۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از دوران خط d حول Δ سطح استوانه‌ای ایجاد می‌شود. برخورد صفحه‌ی P با این سطح استوانه‌ای اگر با خط Δ موازی باشد، مقطع حاصل دو خط موازی است نه مستطیل.

Akbari.ir

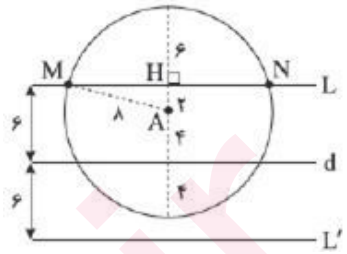
۳۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقاطی که از A به فاصله‌ی ۸ باشد، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۸ است و نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۶ واحد باشند، دو خط موازی L و L' است که فاصله‌ی هر کدام از d برابر ۶ واحد است. حال باید برخورد L و L' با دایره را بررسی کنیم.

با توجه به شکل و داده‌ها خط L' دایره را قطع نمی‌کند، خط L دایره را در M و N قطع می‌کند. مسأله MN را می‌خواهد.

$$\overset{\triangle}{AMH} \;:\; \mathrm{MH} = \sqrt{۸۲۲ - ۲^۲} = \sqrt{۶۴ - ۴} = \sqrt{۶۰} = ۲\sqrt{۱۵}$$

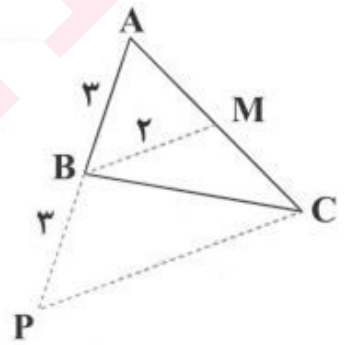
$$\mathrm{MN} = ۲\mathrm{MH} = ۴\sqrt{۱۵}$$



۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر مثلث ABC به صورت زیر باشد و از طرف B به اندازه‌ی ۳ واحد امتداد دهیم تا به P برسیم، بنا بر عکسِ قضیه‌ی تالس، خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} \Rightarrow \mathrm{BM} \parallel \mathrm{CP}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{PC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{\mathrm{PC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{\mathrm{PC}} \Rightarrow \mathrm{PC} = ۴$$

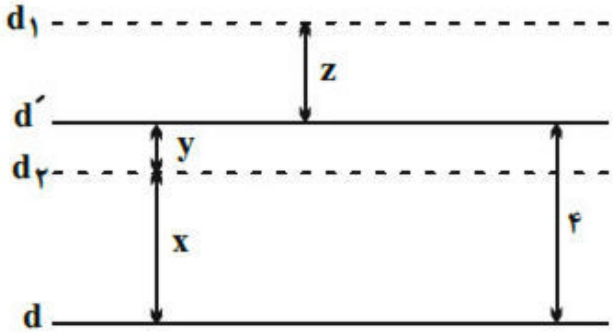


پس مکان هندسی رأس C، دایره‌ای به مرکز P و شعاع ۴ است. به‌جز دو نقطه دقت کنید که نقطه‌ی C نمی‌تواند در امتداد AB قرار گیرد.

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در حالتی‌که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

Akbari1.ir

۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $d_۱$ و $d_۲$ مکان مطلوب را تشکیل می‌دهند. بنابراین:



$$۱)\begin{cases}\frac{x}{y}=۳\Rightarrow x=۳y\Rightarrow ۳y+y=۴\Rightarrow y=۱\ ,\ x=۳\\ x+y=۴\end{cases}$$

$$۲)\frac{z+۴}{z}=۳\Rightarrow z+۴=۳z\Rightarrow ۲z=۴\Rightarrow z=۲$$

$$\text{فاصله}\ d_۱,d_۲=y+z=۱+۲=۳$$

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ناحیه‌ی مطلوب مثلثی متساوی‌الاضلاع داخل مثلث است. برای پیدا کردن نسبت مساحت‌ها کافی است نسبت تشابه دو مثلث را به توان ۲ برسانیم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{A'H'}{AH}\right)^۲$$

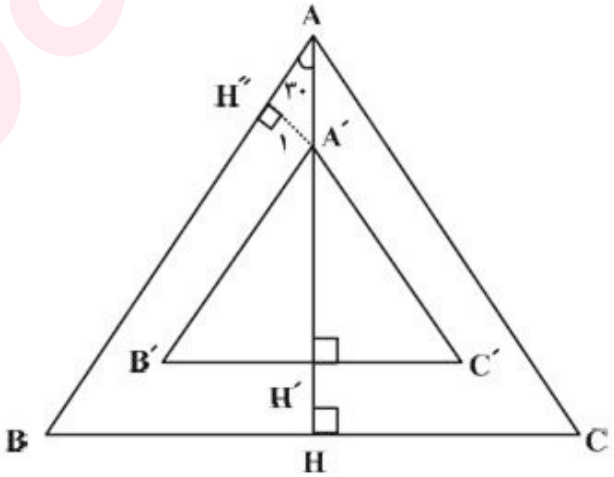
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $AA'H''$ خواهیم داشت:

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{A'H''}{AA'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AA'=۲$$

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۶=۳\sqrt{۳}$$

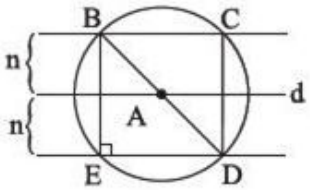
$$A'H'=AH-AA'-HH'=۳\sqrt{۳}-۳$$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\left(\frac{A'H'}{AH}\right)^۲=\left(\frac{۳\sqrt{۳}-۳}{۳\sqrt{۳}}\right)^۲=\left(\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}}\right)^۲=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۳}$$



Akbari1.ir

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



رئوس مربع BCDE حاصل برخورد دو مکان هندسی است:

۱) دایره‌ای به مرکز A و شعاع m

۲) دو خط موازی با d در طرفین d که هر کدام فاصلهٔ n با d دارند.

طول ضلع مربع $= ۲\mathrm{n}, \mathrm{BD} = ۲\mathrm{m}$

$\overset{\triangle}{BED} : \mathrm{BD}^۲ = \mathrm{BE}^۲ + \mathrm{ED}^۲$

$\Rightarrow ۴\mathrm{m}^۲ = ۴\mathrm{n}^۲ + ۴\mathrm{n}^۲ \Rightarrow ۴\mathrm{m}^۲ = ۸\mathrm{n}^۲ \Rightarrow m^۲ = ۲\mathrm{n}^۲$

$\Rightarrow \frac{m^۲}{n^۲} = ۲ \Rightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{۲}$

۳۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

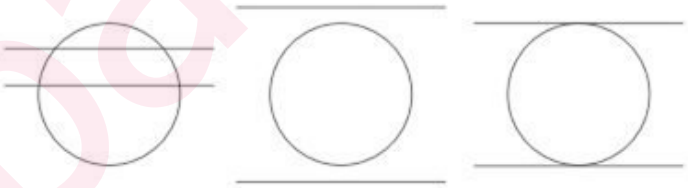
به وضوح می‌دانیم که فصل مشترک صفحه‌ی و رویه‌ی محاطی نمی‌تواند دو خط موازی باشد.

۳۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معین (r) باشد دایره‌ای به مرکز A و شعاع r است.

نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی معین r باشد دو خط موازی در دو طرف خط d به فاصله‌ی r است در نتیجه این ۲ خط دارای فاصله‌ی $۲\mathrm{r}$ از یک‌دیگر هستند.

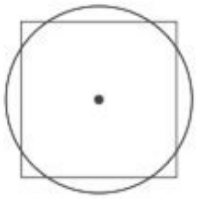
مکان هندسی مطلوب، محل برخورد دایره و این دو خط است که حداکثر در چهار نقطه می‌توانند هم‌دیگر را قطع کنند.



Akbari.ir

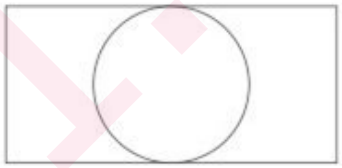
۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

۱) در حالتی که متوازی‌الاضلاع مربع باشد و a کم‌تر از نصف قطر و بیشتر از نصف ضلع مربع باشد، در ۸ نقطه قطع می‌کند.



۲) در حالتی که متوازی‌الاضلاع مربع باشد و a برابر نصف قطر باشد، در ۴ نقطه قطع می‌کند.

۳) در حالتی که متوازی‌الاضلاع مستطیل باشد و a برابر نصف عرض مستطیل باشد، در دو نقطه قطع می‌کند.



۴) در هیچ حالتی دایره‌ای به مرکز محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع آن را در یک نقطه قطع نمی‌کند.

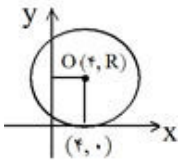
۴۱ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. عرض مرکز در این حالت برابر شعاع دایره است و معادله‌ی دایره به صورت زیر است:

$$C:(x-۴)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \xrightarrow{(۰,۲)\in C} (۰-۴)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$

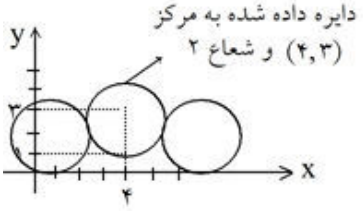
$$\rightarrow \ ۱۶+۴-۴R+\cancel{R^۲}=\cancel{R^۲} \ \rightarrow \ R=۵ \rightarrow (x-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$$

بنابراین محل تقاطع با محور yها برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۰} (۰-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵ \rightarrow (y-۵)^۲=۹ \rightarrow \begin{cases} y-۵=۳ \rightarrow y=۸ \\ y-۵=-۳ \rightarrow y=۲ \end{cases}$$

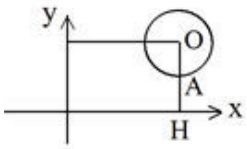


۴۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به آن‌که پایین‌ترین نقطه‌ی $(x-۴)^۲+(y-۳)^۲=۴$ کم‌تر از ۲ واحد با محور xها فاصله دارد، اگر دایره‌ای به شعاع ۲ را بر روی محور xها بغلتانیم، در دو مکان بر دایره‌ی فوق مماس می‌شود. پس ۲ دایره با شرط مذکور وجود دارد.



Akbari.ir

۴۳ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. منحنی به معادله‌ی $(x-۹)^۲+(y-۷)^۲=۴$، معادله‌ی یک دایره به مرکز $O(۹,۷)$ و شعاع $R=۲$ است. با رسم شکل دایره در دستگاه مختصات به راحتی پی می‌بریم نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی از محور xها چه فاصله‌ای دارد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره از محور xها، نقطه‌ی A است. فاصله‌ی نقطه‌ی A از محور xها برابر است با:



$$AH = OH - R = ۷ - ۲ = ۵$$

۴۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط $y=۲x$ و $y=۲x+۱۰$ موازیند بنابراین مرکز دایره روی خط بین آن‌ها به معادله $y=۲x+۵$ قرار دارد. اگر $o(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد آن‌گاه $o(\alpha,۲\alpha+۵)$ و چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد پس فاصله‌ی مرکز o از مبدأ با فاصله o تا خط $y=۲x$ برابر است نتیجه می‌گیریم:

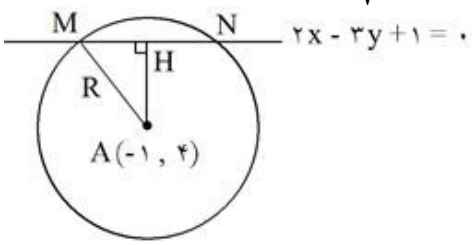
فاصله‌ی o تا خط $(y=۲x)$ = فاصله‌ی o تا مبدا مختصات

$$\sqrt{\alpha^۲+(۲\alpha+۵)^۲}=\frac{|۲\alpha+۵-۲\alpha|}{\sqrt{۱+۴}}\Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha^۲+۲۵+۲۰\alpha=\frac{۲۵}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲+۲۰\alpha+۲۰=۰\Rightarrow \alpha^۲+۴\alpha+۴=۰\Rightarrow(\alpha+۲)^۲=۰\Rightarrow\alpha=-۲$$

بنابراین مرکز دایره $o(-۲,۱)$ می‌باشد.

۴۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض $MN=۲\sqrt{۷}$ نتیجه می‌گیریم $MH=\sqrt{۷}$.



$$AH=\frac{|-۲-۱۲+۱|}{\sqrt{۴+۹}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\sqrt{۱۳}$$

$$\overset{\triangle}{AMH}: AM^۲=AH^۲+MH^۲\Rightarrow R^۲=۱۳+۷=۲۰$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰$ است. حال دایره را با خط $y=۲$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}(x+۱)^۲+(y-۴)^۲=۲۰\\ y=۲\end{cases}\Rightarrow(x+۱)^۲+(۲-۴)^۲=۲۰\Rightarrow(x+۱)^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۴\Rightarrow x=۳\\ x+۱=-۴\Rightarrow x=-۵\end{cases}$$

۴۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^۲+y^۲+۴x-۲y-۵=۰\Rightarrow \text{مرکز دایره}: O(-۲,۱)$$

خط مماس بر دایره در نقطهٔ A، بر شعاع گذرنده از این نقطه عمود است، بنابراین اگر خط مماس را d بنامیم، آنگاه داریم:

$$m_{OA}=\frac{۴-۱}{-۱+۲}\Longrightarrow m_d=-\frac{۱}{۳}$$

$$d\text{ معادله خط}: y-۴=-\frac{۱}{۳}(x+۱)\xrightarrow{\times ۳}۳y-۱۲=-x-۱\Rightarrow x+۳y=۱۱$$

در بین نقاط داده شده، تنها نقطهٔ $(۲,۳)$ بر این خط واقع است.

Akbari.ir

۴۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ C به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=x^۲+y^۲-۱۷\Rightarrow ax+by=-c-۱۷$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $۲x-y=۳$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{-۱}=\frac{-c-۱۷}{۳}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲b\\c=۳b-۱۷\end{cases}$$

نقطهٔ $(۶,-۱)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$x^۲+y^۲-۲bx+by+۳b-۱۷=۰$$

$$\xrightarrow{(۶,-۱)} ۳۶+۱-۱۲b-b+۳b-۱۷=۰\Rightarrow ۱۰b=۲۰\Rightarrow b=۲\Rightarrow\begin{cases}a=-۴\\c=-۱۱\end{cases}$$

شعاع دایره : $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۴۴}}{۲}=\sqrt{\frac{۴۴}{۲}}=۴$

۴۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نقطهٔ $O(۸,۷)$ مرکز دایرهٔ C و نقطهٔ $O'(۲,-۱)$ مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۲y-۴=۰$ و $R'=۳$ شعاع این دایره است، داریم:

$$OO'=\sqrt{(۲-۸)^۲+(-۱-۷)^۲}=۱۰$$

شرط مماس خارج بودن دو دایره : $OO'=R+R'\Rightarrow ۱۰=R+۳\Rightarrow R=۷$

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را حساب می‌کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$$

مرکز دایره : $O'(۱,-۱)$

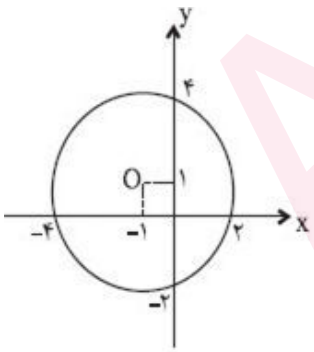
شعاع دایره : $R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲-۴(۱)}=۱$

حال اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین باشد، چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d=OO'=\sqrt{(۱-۲)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}$$

$$d=R+R'\Rightarrow R=d-R'=\sqrt{۲}-۱$$

۵۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، با توجه به شکل زیر داریم:



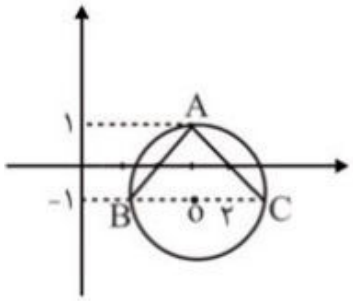
$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{-۴+۲}{۲}=-۱\\\beta&=\frac{۴-۲}{۲}=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow O(-۱,۱)$$

مختصات O را در معادله‌ی خط داده شده قرار می‌دهیم:

$$(m-۱)\times(-۱)+۱=۳\Rightarrow m=-۱$$

Akbari1.ir

۵۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به کمک رسم و توجه به این‌که مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، $o\left|\begin{matrix}۳\\-۱\end{matrix}\right.$ مرکز و $R=۲$ شعاع و $\alpha+\beta+R=۴$ می‌باشد.



۵۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر داریم:

$$AH=BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$OH=\frac{|۴\times۲+۳\times۱+۴|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

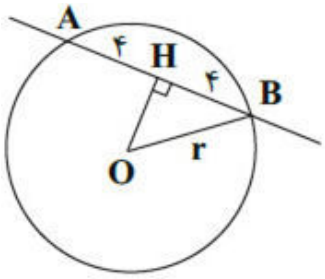
$$\overset{\triangle}{OBH}: r^۲=OH^۲+HB^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵$$

معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$

$$\xrightarrow{y=۰}(x-۲)^۲+(۰-۱)^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow(x-۲)^۲=۲۴\Rightarrow x-۲=\pm۲\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_M=۲+۲\sqrt{۶}\\x_N=۲-۲\sqrt{۶}\end{cases}\Rightarrow MN=(۲+۲\sqrt{۶})-(۲-۲\sqrt{۶})=۴\sqrt{۶}$$



۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا وضعیت دو دایره نسبت به هم را مشخص می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\Rightarrow O(۱,-۱)\ r=\sqrt{۲}$$

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰\Rightarrow O'(-۱,۱)\ r'=\sqrt{۲}$$

$$OO'=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

حال چون $r+r'=۲\sqrt{۲}$، پس $OO'=r+r'$ است، یعنی دو دایره مماس خارج هستند. زمانی که دو دایره مماس خارج باشند، بیشترین فاصله نقاط دو دایره، دو برابر طول خط‌المرکزین است. بنابراین بیشترین فاصلهٔ نقاط این دو دایره برابر $۴\sqrt{۲}$ است.

۵۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a^۲+b^۲>۴c\Rightarrow\frac{۴m}{m-۱}<۱+۱\Rightarrow\frac{۲m}{m-۱}-۱<۰\Rightarrow\frac{m+۱}{m-۱}<۰\Rightarrow-۱<m<۱$$

چون $-۱<\frac{۱۷}{۱۸}<۱$ است، پس m می‌تواند $\frac{۱۷}{۱۸}$ باشد.

Akbari1.ir

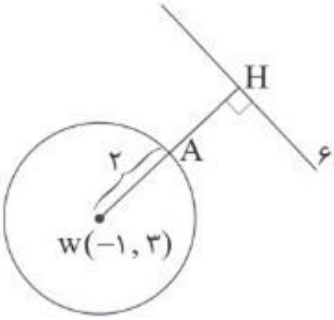
۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^۲+(x-۱)^۲+۲x+m=۰ \Rightarrow ۲x^۲+m+۱=۰, \Delta=۰ \Rightarrow ۰^۲-۴(۲)(m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=-۱$$

$$m=-۱ \Rightarrow \text{دایره}: x^۲+y^۲+۲x-۱=۰ \Rightarrow w(-۱,۰), r=\sqrt{۱+۰+۱}=\sqrt{۲}$$

۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



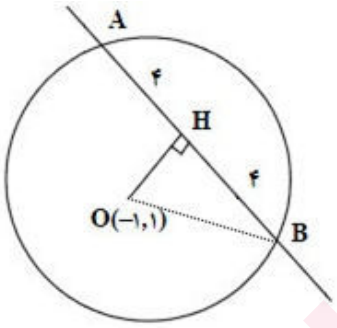
$$۶x+۸y+۲۲=۰ \quad |wH|=\frac{|-۶+۲۴+۲۲|}{۱۰}=۴ \Rightarrow AH=۲$$

۵۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله ۲ قطر دلخواه را قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید:

$$\left.\begin{matrix} m=۲ \Rightarrow y=۲ \\ m=-۱ \Rightarrow x=-۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} o(-۲,۲) \\ A(۱,-۲) \end{cases}$$

$$OA=R=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۲-۲)^۲}=۵ \qquad S=\pi R^۲=۲۵\pi$$

۵۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$۳x+۴y-۱۶=۰$$

$$OH=\frac{|۳(-۱)+۴(۱)-۱۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۳$$

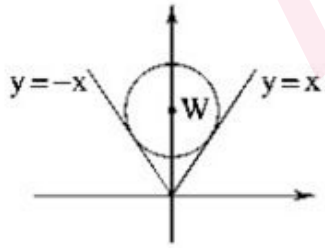
$$\overset{\triangle}{OHB}: OB=R=۵$$

$$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$$

محل برخورد دایره با خط $y=-۳$: $(x+۱)^۲+(-۳-۱)^۲=۲۵$

$$(x+۱)^۲=۹ \Rightarrow x+۱=\pm ۳ \xrightarrow{\text{با طول مثبت}} x=۲$$

۵۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله‌ی دایره‌ی C را می‌نویسیم. می‌دانیم W(مرکز دایره‌ی C) روی محور yهاست و فاصله‌ی $W(۰,\beta)$ از خط $x+y=۰$ برابر شعاع دایره است.



$$R=۳\sqrt{۲}$$

$$\frac{|۰+\beta|}{\sqrt{۱+۱}}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow \beta=۶ \Rightarrow W=(۰,۶)$$

$$x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$$

$$\Rightarrow W'(۳,۱) \quad , R'=\sqrt{۹+۱-۹}=۱$$

$$d=|WW'|=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۶)^۲}=\sqrt{۹+۲۵}=\sqrt{۳۴}$$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۳۴-(۳\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۱۵+۶\sqrt{۲}}$$

Akbari1.ir

۶۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

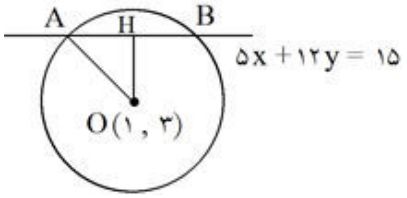
فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه A از خط اول $\frac{|x+۲y+۱|}{\sqrt{۱+۴}}$ و از خط دوم $\frac{|۲x-y+۲|}{\sqrt{۱+۴}}$ است، پس:

$$\frac{(x+۲y+۱)^۲}{۵}+\frac{(۲x-y+۲)^۲}{۵}=۵\Rightarrow ۵x^۲+۵y^۲+۱۰x-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۴=۰$$

مکان موردنظر دایره‌ای به مرکز $(-۱,۰)$ است.

۶۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $۲\sqrt{۲۱}$ است پس $AH=\sqrt{۲۱}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم.



$$OH=\frac{|۵+۳۶-۱۵|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}}=\frac{۲۶}{۱۳}=۲$$

$$\overset{\triangle}{OAH}: OA^۲=OH^۲+AH^۲=۴+۲۱=۲۵$$
$$\Rightarrow OA=۵\Rightarrow R=۵$$

معادله دایره : $(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$

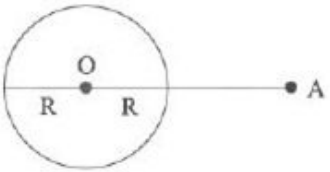
حال نقاط برخورد این دایره با محور xها را تعیین می‌کنیم.

$$y=۰\Rightarrow (x-۱)^۲+۹=۲۵\Rightarrow (x-۱)^۲=۱۶\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۴\Rightarrow x=۵ \\ x-۱=-۴\Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور xها نقطه‌های $M(۵,۰)$ و $N(-۳,۰)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی $MN=۸$ است.

۶۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اول مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم.

$$O\left(\frac{-۲}{۲},\frac{k}{۲}\right)=\left(-۱,\frac{k}{۲}\right), R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-k)^۲-۴(۱)}=\frac{۱}{۲}|k|$$



اگر فاصلهٔ A (خارج دایره) از مرکز دایره برابر d باشد، کم‌ترین فاصلهٔ A از دایره برابر $d-R$ و بیش‌ترین فاصلهٔ A از دایره برابر $d+R$ است، بنابراین:

$$OA=d=\sqrt{(۳+۱)^۲+\left(۴-\frac{k}{۲}\right)^۲}$$

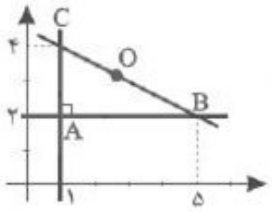
از طرفی ضرب دورترین و نزدیک‌ترین فاصلهٔ A از دایره ۲۴ است، پس:

$$(d-R)(d+R)=۲۴\Rightarrow d^۲-R^۲=۲۴\Rightarrow ۴^۲+\left(۴-\frac{k}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۴}k^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow ۱۶+۱۶-۴k+\frac{k^۲}{۴}-\frac{k^۲}{۴}=۲۴\Rightarrow -۴k=۲۴-۳۲\Rightarrow k=۲$$

Akbari.ir

۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به معادلات داده شده، مثلث حاصل قائم‌الزاویه خواهد بود. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، مرکز دایرهٔ محیطی وسط وتر است، مطابق شکل $A(۱,۲)$ و $B(۵,۲)$ و $C(۱,۴)$ است، پس داریم:



$$\text{BC وسط } O\left|\begin{matrix}\frac{۱+۵}{۲}\\ \frac{۴+۲}{۲}\end{matrix}\right. \Rightarrow O\left|\begin{matrix}۳\\ ۳\end{matrix}\right., R=\text{OB}=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$$

با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۳)^۲+(y-۳)^۲=۵\Rightarrow x^۲+y^۲-۶x-۶y+۱۳=۰\Rightarrow a=-۶,b=-۶,c=۱۳$$

بنابراین $a+b+c=۱$ است.

۶۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$O\left|\begin{matrix}x_۰\\ y_۰\end{matrix}\right. \text{ ربع دوم} \Rightarrow \begin{cases}x_۰<۰\\ y_۰>۰\end{cases}$$

ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ در دایره برابرند پس:

$$k^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}k=۱\Rightarrow y_۰=-۲\\ k=-۱\Rightarrow y_۰=۲ \text{ قابل قبول}\end{cases}$$

$$x^۲+y^۲-۲ax-۴y=۰\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴a^۲+۱۶}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow a^۲=۹$$

$O(a,۲)$ مرکز دایره است پس باید $a<۰$ باشد.

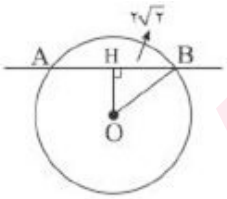
$$a^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}a=۳\Rightarrow x_۰=۳\\ a=-۳\Rightarrow x_۰=-۳ \text{ قابل قبول}\end{cases}$$

$$a+k=-۴$$

۶۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ از خط $ax+by+c=۰$ از فرمول $\text{AH}=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ محاسبه می‌شود.

OH را حساب می‌کنیم و به کمک فیثاغورس، شعاع دایره را حساب می‌کنیم.



$$\text{OH}=\frac{|۰+۲-۴|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow \text{OB}=R=\sqrt{۲+۸}=\sqrt{۱۰}$$

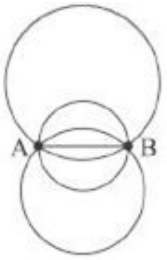
دایره به مرکز $(۰,۲)$ و شعاع $\sqrt{۱۰}$ عبارت است از:

$$(x-۰)^۲+(y-۲)^۲=۱۰$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ای که روی این دایره قرار دارد، نقطهٔ $(۳,۱)$ است، پس گزینهٔ (۱) درست است.

Akbari1.ir

۶۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از نقاط ثابت A و B در صفحه، بی‌شمار دایره می‌گذرد که کوچک‌ترین آن‌ها دایره‌ای است که AB قطر آن است. با داشتن دو سر قطر دایره، معادلهٔ دایره به راحتی نوشته می‌شود.



$$O \text{ وسط } A \text{ و } B \Rightarrow O(۰,۰)$$
$$BA = ۲R \Rightarrow \sqrt{(-۲-۲)^۲ + ۰^۲} = ۲R \Rightarrow R = ۲$$

معادلهٔ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرنده از A و B به‌صورت $x^۲ + y^۲ = ۴$ است. برای این‌که خط $y - mx - ۴ = ۰$ بر دایره مماس باشد باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط برابر با طول شعاع دایره باشد.

$$\frac{|۰ - ۰ - ۴|}{\sqrt{۱^۲ + m^۲}} = ۲ \Rightarrow ۲\sqrt{m^۲ + ۱} = ۴ \Rightarrow \sqrt{m^۲ + ۱} = ۲ \Rightarrow m^۲ + ۱ = ۴ \Rightarrow m^۲ = ۳ \Rightarrow m = \pm\sqrt{۳}$$

۶۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطهٔ تلاقی خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases} \Rightarrow O(۲,-۱)$$

در ضمن فاصلهٔ مرکز O تا خط $x - y = ۱$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \text{فاصلهٔ خط تا } o = \frac{|۲ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

بنابراین: $\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = ۲\pi$

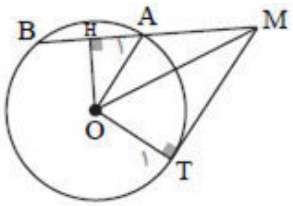
۶۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد. چون O روی خط $y = ۲x - ۱$ قرار دارد پس $O(\alpha, ۲\alpha - ۱)$ است. داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - ۱)^۲ + (۲\alpha - ۳)^۲} = \sqrt{(\alpha - ۳)^۲ + (۲\alpha - ۱)^۲}$$
$$\Rightarrow \alpha^۲ + ۱ - ۲\alpha + ۴\alpha^۲ + ۹ - ۱۲\alpha = \alpha^۲ + ۹ - ۶\alpha + ۴\alpha^۲ + ۱ - ۴\alpha \Rightarrow -۱۴\alpha + ۱۰$$
$$= -۱۰\alpha + ۱۰ \Rightarrow \alpha = ۰ \Rightarrow O(۰,-۱)$$

بنابر $R = OA = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$ پس معادله‌ی دایره به صورت $x^۲ + (y + ۱)^۲ = ۱۰$ است.

Akbari.ir

۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طبق روابط طولی اگر MT مماس بر دایره باشد. داریم:



$$\begin{cases} AB = ۱ \\ MT^۲ = MA \times MB\ ,\ O(۰,۰)\ ,\ R = ۱ \\ OM = \sqrt{۲^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۳} \end{cases}$$

$$MT^۲ = OM^۲ - OT^۲ \Rightarrow MT = \sqrt{(\sqrt{۱۳})^۲ - ۱^۲} = \sqrt{۱۲}$$

حال فرض کنیم $MA = x$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$MT^۲ = MA \times MB \Rightarrow ۱۲ = x(x+۱) \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۳)(x+۴) = ۰ \Rightarrow x = ۳, x = -۴ \text{ غ ق ق}$$

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAH} : OH^۲ = OA^۲ - AH^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{AOM}} = \frac{۱}{۲} \times OH \times AM = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۳ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

۷۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر مجموع شعاع‌ها برابر فاصله‌ی دو مرکز باشد، c به دست می‌آید:

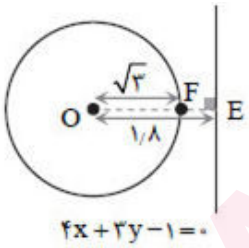
$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۶y - ۱۵ = ۰ \rightarrow O(-۱,۳), R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۳۶ - ۴(-۱۵)} = ۵$$

$$x^۲ + y^۲ + ۲x + ۶y + c = ۰ \rightarrow O'(-۱,-۳), R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۳۶ - ۴c}$$

$$OO' = \sqrt{۰ + ۶^۲} = ۶ \Rightarrow ۶ = R + R' = ۵ + R' \Rightarrow R' = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۰ - ۴c} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۴c \Rightarrow c = ۹$$

۷۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا وضعیت خط و دایره را تعیین کرده، سپس کم‌ترین اندازه‌ی EF را می‌یابیم:



$$x^۲ - ۲x + ۱ - ۱ + y^۲ - ۴y + ۴ - ۴ + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow \begin{cases} O(۱,۲) \\ R = \sqrt{۳} \end{cases}$$

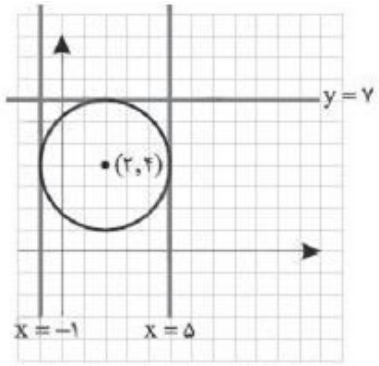
اکنون فاصله‌ی مرکز تا خط را می‌یابیم:

$$OE = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۴ \times ۱ + ۳ \times ۲ - ۱|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{۹}{۵} = ۱/۸ \Rightarrow OE > R \Rightarrow$$ خط دایره را قطع نمی‌کند.

$$EF = OE - OF = ۱/۸ - \sqrt{۳}$$

Akbari.ir

۷۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به این‌که $x = ۵$ و $x = -۱$ بر دایره مماس است، پس قطر دایره برابر ۶ است.

$$۲r = ۶ \Rightarrow r = ۳$$

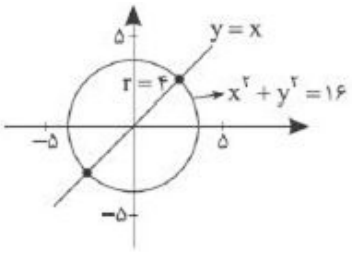
اگر $x = ۵$ بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ باشد، پس طول مرکز دایره برابر $۵ - ۳ = ۲$ است و چون بر خط $y = ۷$ هم مماس شده است، عرض مرکز آن برابر $۷ - ۳ = ۴$ می‌شود، پس معادلهٔ دایره به شکل $(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲ = ۹$ است. با قرار دادن $x = ۴$ در معادله داریم:

$$(y-۴)^۲ = ۵ \Rightarrow y = ۴ \pm \sqrt{۵} \Rightarrow \text{فاصله نقاط} = ۲\sqrt{۵}$$

۷۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وتری که خط $x = y$ روی دایره‌ای به مرکز $(۰,۰)$ را جدا می‌کند برابر قطر دایره است:

$$۲r = ۸ \Rightarrow r = ۴$$

حالا معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $(۰,۰)$ را می‌نویسیم:



$$x^۲ + y^۲ = ۱۶$$

فقط گزینهٔ (۲) در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

۷۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که مرکز دایره $(۲,-a)$ است و بر محور y ها مماس است، پس: $r = ۲$

$$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + (۲a)^۲ - ۴a} = ۲ \Rightarrow ۱۶ + ۴a^۲ - ۴a = ۱۶$$

$$\Rightarrow ۴a(a-۱) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } a = ۱$$

چون $a > ۰$ است، پس $a = ۱$ قابل قبول است.

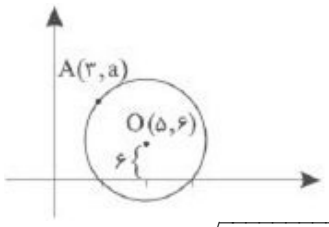
$$a = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow O(۲,-۱)$$

اگر این دایره نسبت به خط $y = -۱$ دوران کند، کره‌ای به شعاع ۲ حاصل می‌شود که حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳ = \frac{۳۲\pi}{۳}$$

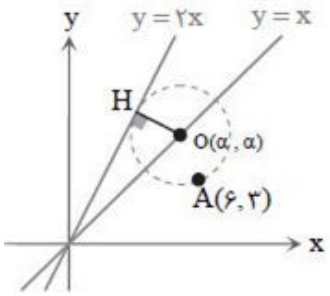
Akbari.ir

۷۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اگر شعاع دایره بیش از ۶ باشد، نمودار آن از ناحیهٔ چهارم می‌گذرد.



$$OA = r \Rightarrow OA = \sqrt{(۳-۵)^۲ + (a-۶)^۲} = \sqrt{۴ + (a-۶)^۲} \leqslant ۶$$
$$\Rightarrow (a-۶)^۲ \leqslant ۳۲ \Rightarrow -\sqrt{۳۲} \leqslant a-۶ \leqslant \sqrt{۳۲}$$
$$\Rightarrow ۶ - \sqrt{۳۲} \leqslant a \leqslant ۶ + \sqrt{۳۲} \xrightarrow{a \in Z} a = ۱, ۳, \ldots, ۱۱$$

۷۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را داریم. پس مرکز دایره یعنی $O(\alpha, \alpha)$ از نقطه‌ی A و خط $y = ۲x$ به یک فاصله است.



$$OH = OA \Rightarrow \frac{|\alpha - ۲\alpha|}{\sqrt{۱+۴}} = \sqrt{(\alpha-۶)^۲ + (\alpha-۳)^۲} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$$
$$\frac{\alpha^۲}{۵} = \alpha^۲ + ۳۶ - ۱۲\alpha + \alpha^۲ + ۹ - ۶\alpha \Rightarrow \frac{\alpha^۲}{۵} = ۲\alpha^۲ - ۱۸\alpha + ۴۵$$
$$۹\alpha^۲ - ۹۰\alpha + ۲۲۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ - ۱۰\alpha + ۲۵ = ۰$$
$$\Rightarrow (\alpha-۵)^۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۵ \Rightarrow O(۵,۵)$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با: $R = OA = \sqrt{(۶-۵)^۲ + (۳-۵)^۲} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{۵}$

۷۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم معادله‌ی دایره‌ی گذرا از نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۳,۱)$ و $C(۱,-۳)$ به صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} A \in \text{دایره} &\Rightarrow c = ۰ \\ B \in \text{دایره} &\Rightarrow ۹ + ۱ + ۳a + b + c = ۰ \\ C \in \text{دایره} &\Rightarrow ۱ + ۹ + a - ۳b + c = ۰ \end{aligned} \Rightarrow {}^{۳}\begin{cases} ۳a + b = -۱۰ \\ a - ۳b = -۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۰a = -۴۰ \Rightarrow a = -۴$$

پس $b = ۲$، در نتیجه معادله‌ی دایره $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۰$ است.

$$R = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۱۶+۴}}{۲} = \sqrt{۵}$$

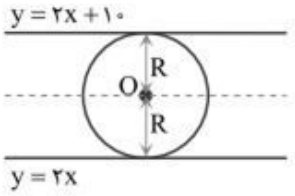
۷۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز M باید از دو خط $y = ۳x$ و $x = ۳y$ به یک فاصله باشد. داریم:

$$(\text{فاصله M از خط } x = ۳y) = (\text{فاصله‌ی M از خط } y = ۳x) \Rightarrow \frac{|۶\sqrt{۵} - b|}{\sqrt{۱۰}} = \frac{|۲\sqrt{۵} - ۳b|}{\sqrt{۱۰}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۶\sqrt{۵} - b = ۲\sqrt{۵} - ۳b \Rightarrow ۲b = -۴\sqrt{۵} \Rightarrow b = -۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \frac{|۶\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۴}} = ۴\sqrt{۲} \\ ۶\sqrt{۵} - b = -۲\sqrt{۵} + ۳b \Rightarrow ۴b = ۸\sqrt{۵} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \frac{|۶\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۱۰}} = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

پس شعاع دایره‌ی کوچک‌تر برابر $۲\sqrt{۲}$ است.

Akbari.ir

۷۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ موازی‌اند. پس مرکز دایره ای که به این دو خط موازی مماس است روی خط $y = ۲x + ۵$ قرار می‌گیرد. در ضمن فاصله‌ی این دو خط موازی برابر قطر دایره است. داریم:



$$۲R = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵}} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow R = \sqrt{۵}$$

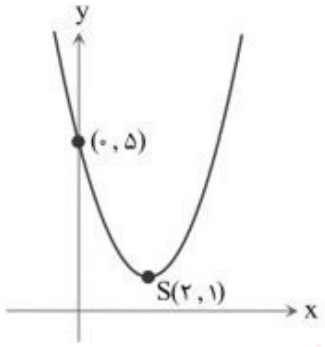
حال فرض کنیم $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد چون O روی خط $y = ۲x + ۵$ است. پس $O(\alpha, ۲\alpha + ۵)$ در ضمن مبدأ مختصات روی دایره است.

بنابراین فاصله‌ی مرکز O تا مبدأ برابر شعاع دایره است. داریم:

$$\sqrt{\alpha^۲ + (۲\alpha + ۵)^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha^۲ + ۲۵ + ۲۰\alpha = ۵$$
$$\Rightarrow \alpha^۲ + ۲۰۲ + ۲۰ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha + ۴ = ۰ \Rightarrow (\alpha + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = -۲$$

پس مرکز دایره نقطه‌ی $(-۲, ۱)$ است.

۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. پس دهانه‌ی سهمی رو به بالا است. بنابراین معادله‌ی این سهمی به صورت زیر است.



$$(x - \alpha)^۲ = ۴a(y - \beta) \Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۴a(y - ۱)$$

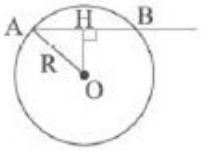
$$\xrightarrow{\text{س‌هی} \in (۰,۵)} (۰ - ۲)^۲ = ۴a(۵ - ۱) \Rightarrow ۴ = ۴a(۵ - ۱) \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

و معادله‌ی خط هادی این سهمی به‌صورت زیر است.

$$y = -a + \beta \Rightarrow y = -\frac{۱}{۴} + ۱ \Rightarrow y = \frac{۳}{۴}$$

۸۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، $AH = \frac{AB}{۲} = \sqrt{۳}$ ، OH برابر با فاصلهٔ O تا خط $x + ۲y = ۴$ است.



$$OH = \frac{|۱ - ۲ - ۴|}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$\overset{\triangle}{OAH} : OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ = ۳ + ۵ = ۸ \Rightarrow OA = \sqrt{۸} = R$$

بنابراین معادلهٔ داره به‌صورت زیر است:

$$(x - ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۸ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - ۶ = ۰$$

Akbari1.ir

۸۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف $x^۲$ و $y^۲$ از دستگاه هر آن‌چه بماند معادله وتر مشترک است.

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۲y-۳=۰ \\ x^۲+y^۲+۲x-۳=۰ \end{cases}$$ (-۱)

$$۲y-۲x=۰ \Rightarrow x=y$$

۸۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای بررسی وضعیت نسبی دو دایره، مقادیر OO' (خط المرکزین) و R و R' (شعاع دو دایره) را محاسبه می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y-۷=۰ \Rightarrow O(-۱,۱)$$

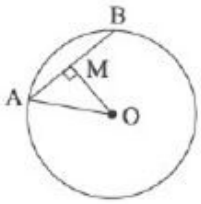
$$R=\frac{\sqrt{۴+۴+۲۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۳۶}}{۲}=۳$$

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y+۱=۰ \Rightarrow O'(۱,۱)$$

$$R'=\frac{\sqrt{۴+۴-۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱ \Rightarrow OO'=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(۱-۱)^۲}=۲$$

چون $OO'=۲$ و $|R-R'|=۲$ پس دو دایره مماس درون هستند.

۸۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون معادله‌ی $۲x^۲+ay^۲-۱۲x+۸y+۸=۰$ معادله‌ی یک دایره است، پس باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر باشند، یعنی $a=۲$ است، در این صورت خواهیم داشت:



$$۲x^۲+۲y^۲-۱۲x+۸y+۸=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۶x+۴y+۴=۰$$

$$\text{مرکز } O(۳,-۲),\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۱۶-۱۶}=۳$$

حال اگر از مرکز دایره به وسط وتر موردنظر وصل کنیم، OM بر AB عمود خواهد بود، زیرا مثلث OAB متساوی‌الساقین است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$OM=\sqrt{(۳-۱)^۲+۰}=۲ \Rightarrow AM=\sqrt{۹-۴}=\sqrt{۵} \Rightarrow AB=۲\sqrt{۵}$$

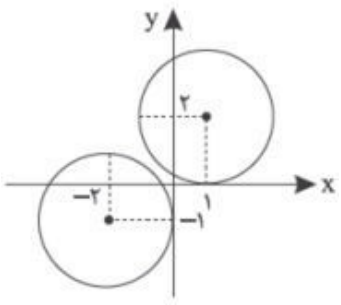
۸۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$O_۱(۱,۲), r_۱=۲$$

$$O_۲(-۲,-۱), r_۲=\sqrt{۴+۱-۱}=۲$$

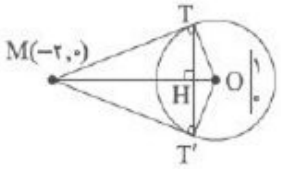
$$O_۱O_۲=\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲} \quad ۴/۲ \text{ : طول خط المرکزین}$$

$O_۱O_۲ > r_۱+r_۲ \Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند.



Akbari1.ir

۸۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$O(۱,۰), R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰-۰} = ۱$$

$$\mathrm{MO} = \sqrt{۹+۰} = ۳$$

$$\mathrm{OT} = R = ۱$$

$$\mathrm{OT}^۲ = \mathrm{OH}\times\mathrm{OM} \Rightarrow ۱ = \mathrm{OH}\times ۳ \Rightarrow \mathrm{OH} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \mathrm{HM} = ۳ - \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\mathrm{TH}^۲ = \mathrm{OH}\times\mathrm{HM} = \frac{۱}{۳}\times\frac{۸}{۳} = \frac{۸}{۹} \Rightarrow \mathrm{TH} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\mathrm{TT}' = ۲\mathrm{TH} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۸۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر معادلهٔ دایره‌ها به شکل $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$ باشد، چون دو دایره بر هر دو محور مختصات مماس هستند و هر دو از نقطهٔ $A(۲,۱)$ در ناحیهٔ اول می‌گذرند پس:

$$R = \alpha = \beta \Rightarrow (x-R)^۲ - (y-R)^۲ = R^۲ \xrightarrow{A(۲,۱)} (۲-R)^۲ + (۱-R)^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow ۴ + R^۲ - ۴R + ۱ + R^۲ - ۲R = R^۲ \Rightarrow R^۲ - ۶R + ۵ = ۰ \Rightarrow (R-۵)(R-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = ۱ \Rightarrow O\Big|_{۱}^{۱} \\ R' = ۵ \Rightarrow O'\Big|_{۵}^{۵} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{OO}' = \sqrt{۱۶+۱۶} = \sqrt{۳۲}$$

طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۳۲-(۵-۱)^۲} = \sqrt{۳۲-۱۶} = ۴$

۸۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

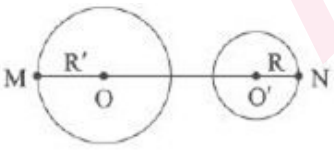
$$\begin{cases} O = (-۱,۱) \\ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۴} = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} O' = (۲,-۳) \\ R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶-۳۶} = ۲ \end{cases}$$

$$\mathrm{OO}' = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

$\mathrm{OO}' > R + R' \Rightarrow$ دو دایره متخارج هستند

بیش‌ترین فاصلهٔ نقاط دو دایره مطابق شکل، MN است.



$$\mathrm{MN} = \mathrm{OO} + R + R' = ۵ + ۱ + ۲ = ۸$$

Akbari.ir

۸۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر در معادله‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ ، $a^۲+b^۲-۴c\leq ۰$ باشد، این رابطه نمی‌تواند معادله‌ی دایره باشد.

$$۲^۲+(-m)^۲-۴(m+۱)\leq ۰\Rightarrow ۴+m^۲-۴m-۴\leq ۰$$

$$m^۲-۴m\leq ۰$$

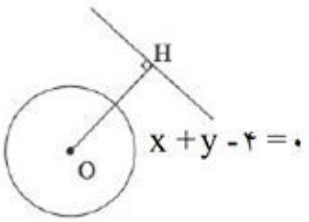
	۰		۴	
	+	−		+

$$۰\leq m\leq ۴$$

به‌ازای ۵ مقدار صحیح m، رابطه‌ی داده شده معادله‌ی دایره نیست.

۹۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده بیشتر از شعاع دایره باشد.



$$x^۲+y^۲-۲y-k=۰$$

$$O(۰,۱)\ ,\ R=\sqrt{۱+k}$$

$$OH=\frac{|۰+۱-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow OH>R\Rightarrow\frac{۳}{\sqrt{۲}}>\sqrt{۱+k}$$

$$\Rightarrow\frac{۹}{۲}>۱+k\Rightarrow\frac{۹}{۲}-۱>k\Rightarrow k<\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

بیشترین مقدار صحیح k برابر ۳ است.

۹۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرکز دایره محل تلاقی قطرهای آن است بنابراین:

$\begin{cases}x+y=-۲\\x-y=۶\end{cases}\rightarrow x=۲,y=-۴$ مختصات مرکز دایره $O\,(۲,-۴)$

فاصله نقطه O تا خط مماس همان شعاع دایره R است:

$$R=\frac{|۴(۲)+۳(-۴)-۲۱|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

دایره $S=\pi R^۲=۲۵\pi$

۹۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محل برخورد دو قطر دلخواه همان مرکز دایره است. با انتخاب دو مقدار برای m دو قطر دایره را به دست میآوریم.

$$\left.\begin{array}{l}m=-۲\Rightarrow(-۲-۱)x+۳=۰\Rightarrow x=۱\\m=۱\Rightarrow(۱+۲)y+۳=۰\Rightarrow y=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow O(۱,-۱)\text{ مرکز دایره}$$

$$A(۵,۲)\text{ شعاع دایره}=OA\Rightarrow r=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲-(-۱))^۲}=۵$$

$$S=\pi r^۲=\pi(۵)^۲=۲۵\pi$$

۹۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله‌ی دایره محیطی را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ درنظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}A(۴,۲)\Rightarrow ۴a+۲b+c=-۲۰\\B(-۴,۶)\Rightarrow -۴a+۶b+c=-۵۲\\C(-۱,۷)\Rightarrow -a+۷b+c=-۵۰\end{array}\right\}\Rightarrow a=۲,b=-۴,c=-۲۰$$

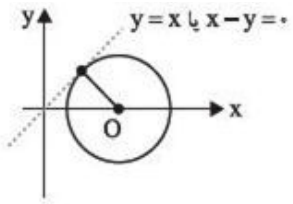
$$\Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۴y-۲۰=۰\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\Rightarrow r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۸۰}=۵$$

محیط دایره $=۲\pi r=۲\pi(۵)=۱۰\pi$

Akbari1.ir

۹۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره روی محور x ها به صورت $O(\alpha, ۰)$ می‌باشد. دایره بر خط $x - y = ۰$ مماس است و فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط برابر شعاع است. می‌خواهد شعاع کم‌تر از $\sqrt{۲}$ باشد پس:

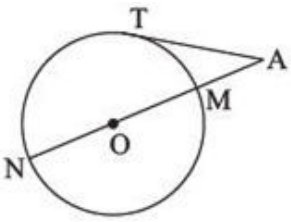


$$\frac{|\alpha - ۰|}{\sqrt{۲}} < \sqrt{۲} \Rightarrow |\alpha| < ۲ \Rightarrow -۲ < \alpha < ۲$$

یک مقدار طبیعی یعنی $\alpha = ۱$ برای طول مرکز وجود دارد.

۹۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطهٔ A خارج از دایره قرار دارد. از A به مرکز دایره وصل می‌کنیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند. در این صورت M نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا A و N دورترین نقطهٔ دایره تا A است. حال مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم پس $AT^۲ = AM \times An$ است داریم:



$$AT = \sqrt{f(A)} = \sqrt{f(۲, ۱)} = \sqrt{۴ + ۱ + ۸} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow AT^۲ = ۱۳$$

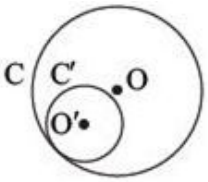
در نتیجه $AM \times AN = ۱۳$ است.

توجه کنید اگر $f(x, y) = ۰$ معادلهٔ یک دایره و نقطهٔ A بیرون این دایره باشد، آن‌گاه طول مماس رسم شده از A بر این دایره برابر $\sqrt{f(A)}$ است.

۹۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$O(۲, ۳), R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۱۲} = ۴$$

مرکز و شعاع دایرهٔ C که بر محورهای مختصات در ناحیهٔ اول مماس باشد عبارت است از:



$$O'(\alpha, \alpha), R' = \alpha$$

دایرهٔ C و C' مماس داخل هستند پس:

$$OO' = |R - R'|, OO' = \sqrt{(۲ - \alpha)^۲ + (۳ - \alpha)^۲}$$

$$\sqrt{(۲ - \alpha)^۲ + (۳ - \alpha)^۲} = |۴ - \alpha|$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{\alpha^۲} - ۴\alpha + ۴ + ۹ - ۶\alpha + \alpha^۲ = ۱۶ - ۸\alpha + \cancel{\alpha^۲}$$

$$\Rightarrow \alpha^۲ - ۲\alpha - ۳ = ۰ \Rightarrow (\alpha + ۱)(\alpha - ۳) = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱ \text{ یا } \alpha = ۳$$

دایره در ناحیهٔ اول است پس $\alpha = ۳$ قابل قبول است و $R' = ۳$ است.

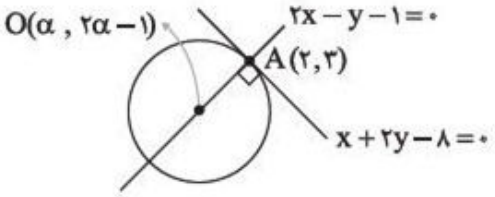
Akbari.ir

۹۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا این دو خط را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا مختصات نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ C پیدا شود.

$$\begin{cases} x+۲y=۸ \\ ۲x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۲, y=۳, A(۲,۳)$$

از آن‌جایی که این نقطه در ناحیهٔ اول است و روی دایرهٔ C قرار دارد و دایرهٔ C مماس بر محور y ها است پس:



مرکز دایره بر روی خط قائم است پس $O(\alpha, ۲\alpha-۱)$ است و چون دایره مماس بر محور y ها می‌باشد، طول مرکز برابر شعاع دایره است یعنی $R=|\alpha|$. از طرفی $OA=R$ است پس:

$$OA=R \Rightarrow \sqrt{(\alpha-۲)^۲+(۲\alpha-۴)^۲}=|\alpha|$$

طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\cancel{\alpha^۲}-۴\alpha+۴+۴\alpha^۲-۱۶\alpha+۱۶=\cancel{\alpha^۲}$$

$$\Rightarrow ۴\alpha^۲-۲۰\alpha+۲۰=۰ \xrightarrow{\div ۴} \alpha^۲-۵\alpha+۵=۰$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{۵\pm\sqrt{۲۵-۲۰}}{۲}=\frac{۵\pm\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲} \\ \alpha=\frac{۵-\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

چون بزرگ‌ترین شعاع را می‌خواهد پس $R=\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲}$ است.

۹۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰ \Rightarrow \begin{cases} O(۱,۱) \\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴-۰}=\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$x^۲+y^۲+۴x-۴y=۰ \Rightarrow \begin{cases} O'(-۲,۲) \\ r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶}=۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲} \Rightarrow OO'=|r-r'|$$

بنابراین دو دایره مماس داخل هستند.

۹۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AM=۲MO \Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۶)^۲}=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$\Rightarrow x^۲-۶x+۹+y^۲-۱۲y+۳۶=۴x^۲+۴y^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲+۳y^۲+۶x+۱۲y-۴۵=۰ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۴y-۱۵=۰$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۶۰}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۰}=۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{قطر دایره = طول بزرگ‌ترین وتر}=۴\sqrt{۵}$$

Akbari1.ir

۱۰۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(۲,-۱) \\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۱۲} = ۲\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$O(۲,-۱), O'(۱,-۲) \Rightarrow OO' = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲}$$

دو دایره مماس داخل‌اند $\Rightarrow OO' = |r - r'|$

$$\sqrt{۲} = \left|۲\sqrt{۲} - r'\right| \Rightarrow \begin{cases} ۲\sqrt{۲} - r' = \sqrt{۲} \Rightarrow r' = \sqrt{۲} \\ ۲\sqrt{۲} - r' = -\sqrt{۲} \Rightarrow r' = ۳\sqrt{۲} \end{cases}$$

Akbari1.ir

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	**۲**	۳	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	**۱**	۲	۳	۴
۷	۱	**۲**	۳	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	**۴**
۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۹	۱	**۲**	۳	۴
۲۰	۱	**۲**	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	**۳**	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	**۳**	۴
۲۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	۱	**۲**	۳	۴
۲۸	۱	**۲**	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	**۴**
۳۰	۱	۲	**۳**	۴
۳۱	۱	۲	**۳**	۴
۳۲	**۱**	۲	۳	۴

۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۳۵	۱	۲	**۳**	۴
۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	۱	۲	**۳**	۴
۳۹	**۱**	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۱	۱	۲	۳	**۴**
۴۲	۱	**۲**	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	**۳**	۴
۴۵	**۱**	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	**۳**	۴
۴۷	۱	۲	۳	**۴**
۴۸	۱	**۲**	۳	۴
۴۹	۱	**۲**	۳	۴
۵۰	۱	۲	**۳**	۴
۵۱	۱	۲	۳	**۴**
۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۵۳	۱	۲	۳	**۴**
۵۴	**۱**	۲	۳	۴
۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۵۶	۱	**۲**	۳	۴
۵۷	۱	**۲**	۳	۴
۵۸	۱	**۲**	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	**۴**
۶۰	**۱**	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	**۴**
۶۲	**۱**	۲	۳	۴
۶۳	**۱**	۲	۳	۴
۶۴	**۱**	۲	۳	۴

۶۵	**۱**	۲	۳	۴
۶۶	۱	**۲**	۳	۴
۶۷	۱	**۲**	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	**۴**
۶۹	۱	۲	**۳**	۴
۷۰	۱	۲	۳	**۴**
۷۱	**۱**	۲	۳	۴
۷۲	۱	**۲**	۳	۴
۷۳	۱	**۲**	۳	۴
۷۴	**۱**	۲	۳	۴
۷۵	۱	**۲**	۳	۴
۷۶	**۱**	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	**۳**	۴
۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	**۳**	۴
۸۰	۱	۲	**۳**	۴
۸۱	**۱**	۲	۳	۴
۸۲	**۱**	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	**۳**	۴
۸۴	۱	**۲**	۳	۴
۸۵	**۱**	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	**۴**
۸۷	۱	۲	**۳**	۴
۸۸	۱	۲	**۳**	۴
۸۹	۱	۲	**۳**	۴
۹۰	۱	۲	**۳**	۴
۹۱	۱	۲	**۳**	۴
۹۲	۱	۲	۳	**۴**
۹۳	۱	۲	**۳**	۴
۹۴	**۱**	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	**۳**	۴
۹۶	۱	۲	**۳**	۴

۹۷	۱	۲	۳	**۴**
۹۸	۱	۲	۳	**۴**
۹۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۰	**۱**	۲	۳	۴